

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU
FAKULTÄT FÜR INFORMATIK UND AUTOMATISIERUNG
INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK
FACHGEBIET AUTOMATEN UND LOGIK

Masterarbeit

Einbettungen in das Transformationsmonoid einer vergesslichen Warteschlange

Vorgelegt von:
Chris Köcher

Betreuer: Prof. Dr. Dietrich Kuske
2. Gutachterin: K. f.-m. n. Olena Prianychnykova

Studiengang: Informatik 2011
Matrikel-Nr.: 48203

Eingereicht: Ilmenau, den 2. September 2016

Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden Warteschlangen-Speicher, die beliebige Teile ihres Inhalts vergessen können, als Monoid $\mathcal{Q}_\ell^{(n)}$ modelliert (wobei n die Größe des zugrundeliegenden Alphabets ist) und Einbettungen in dieses Monoid untersucht. Zunächst wird ein allgemeines Kriterium angegeben, wann ein Homomorphismus in $\mathcal{Q}_\ell^{(n)}$ keine Einbettung ist. Daraus wird gefolgert, dass sich die Transformationsmonoiden über großen Alphabeten nicht in solche mit kleinen Alphabeten einbetten lassen. Weiterhin lässt sich das Transformationsmonoid einer zuverlässigen Warteschlange nicht in eine vergessliche Warteschlange einbetten und umgekehrt. Zuletzt werden noch Charakterisierungen für die Klasse der Spurmonoiden angegeben, die sich in das Transformationsmonoid einbetten lassen. Für $n \geq 3$ entspricht die Klasse von $\mathcal{Q}_\ell^{(n)}$ mit der des Transformationsmonoids einer zuverlässigen Warteschlange, für $\mathcal{Q}_\ell^{(2)}$ ist diese Klasse dagegen echt kleiner.

Abstract

In this thesis we model so called lossy queues (also called “lossy channels”) as monoids of transformations denoted by $\mathcal{Q}_\ell^{(n)}$, where n is the size of the underlying alphabet of write and read operations. These queues can randomly forget some parts of their content at any time. Our focus is the study of embeddings into this monoid. At first we give a common criterion on embeddings into $\mathcal{Q}_\ell^{(n)}$. With the help of this criterion we can show that $\mathcal{Q}_\ell^{(n)}$ doesn't embed into $\mathcal{Q}_\ell^{(m)}$ iff $n > m$. Additionally we can show that $\mathcal{Q}_\ell^{(n)}$ doesn't embed into $\mathcal{Q}_r^{(2)}$ (where $\mathcal{Q}_r^{(2)}$ is the monoid of transformations on a classic reliable queue) as well as $\mathcal{Q}_r^{(2)}$ doesn't embed into $\mathcal{Q}_\ell^{(n)}$. Finally we investigate into a characterization of the class of trace monoids that embed into $\mathcal{Q}_\ell^{(n)}$. As a result we get that the class of embeddings of trace monoids into $\mathcal{Q}_\ell^{(n)}$ (for $n \geq 3$) is the same class as the embeddings into $\mathcal{Q}_r^{(2)}$. Furthermore, the class of $\mathcal{Q}_\ell^{(2)}$ is a proper subclass of the class of embeddings into $\mathcal{Q}_\ell^{(3)}$.

Inhaltsverzeichnis

I	Einleitung	1
	1.1 Motivation und Zielstellung	1
	1.2 Aufbau der Arbeit	2
II	Grundlagen	3
	2.1 Monoidtheorie	3
	2.2 Wörter und Sprachen	4
	2.3 Semi-Thue-Systeme	4
	2.4 Zuverlässige Warteschlangen	5
III	Vergessliche Warteschlangen	9
	3.1 Definition des Transformationsmonoids	9
	3.2 Wichtige Eigenschaften	13
IV	Das Monoid der Normalformen	17
	4.1 Definition der Normalform	17
	4.2 Eindeutigkeit der Normalform	19
	4.3 Operation auf den Normalformen	22
V	Ein Kriterium zur Nicht-Einbettung	29
	5.1 Vorbereitungen	29
	5.2 Das Kriterium	32
	5.3 Beispiel: Direktes Produkt zweier freier Monoide	36
VI	Einbettung in vergessliche Warteschlangen mit wenigen Symbolen	41
VII	Einbettung zuverlässiger Warteschlangen	45
	7.1 Einbettung von $\mathcal{Q}_r^{(n)}$ in $\mathcal{Q}_\ell^{(n)}$	45
	7.2 Das Nicht-Einbettungs-Kriterium für $\mathcal{Q}_r^{(n)}$	46
	7.3 Einbettung von $\mathcal{Q}_\ell^{(n)}$ in $\mathcal{Q}_r^{(n)}$	49
VIII	Einbettung von Spurmonoiden	51
	8.1 Grundlagen	51
	8.2 Der allgemeine Fall	52
	8.2.1 $(\Gamma_+ \cup \Gamma_-, I)$ ist vollständig bipartit	53
	8.2.2 Knoten aus $\Gamma_+ \cup \Gamma_-$ sind mit allen Kanten verbunden	54
	8.2.3 Knoten aus Γ_\pm haben höchstens Grad 1	55
	8.2.4 (Γ, I) ist P_4 -frei	56
	8.3 Der Fall mit zwei Symbolen	57
	8.3.1 Beweis der Implikation “(B2) \Rightarrow (B1)”	58
	8.3.2 Beweis der Implikation “(B1) \Rightarrow (B2)”	61

IX	Abschluss und Ausblick	63
	9.1 Ergebnisse	63
	9.2 Ausblick	63
	Literaturverzeichnis	65

KAPITEL I

Einleitung

1.1 Motivation und Zielstellung

In der Automatentheorie wird versucht, verschiedene Berechnungsmodelle auf ihre Ausdrucksstärke und Analysierbarkeit hin zu untersuchen. Diese mathematischen Modelle unterscheiden sich häufig in den verwendeten Datenstrukturen zum Speichern von Informationen. So gibt es beispielsweise potenziell unendliche Bänder mit Lese- und Schreibzugriff in Turingmaschinen, einen unendlichen Stapelspeicher in Kellerautomaten oder auch Warteschlangen in Kanalsystemen. Ein Teil der aktuellen Forschung hat sich mittlerweile darauf verlagert, diese Speichermechanismen genauer zu untersuchen. So versucht man, die Transformationen in Form von spezifischen Operationsfolgen auf den Datenstrukturen mathematisch als Monoide zu modellieren. Es ergibt sich, dass sich die fundamentalen Eigenschaften der Datenstrukturen hierbei auf die verschiedenen algebraischen Eigenschaften der Monoide auswirken. So wurde in [Kam09] beispielsweise gezeigt, dass Kellerspeicher ein polyzyklisches Monoid induzieren oder blinde Zähler das Monoid $(\mathbb{Z}, +)$ induzieren. Weitere allgemeine Betrachtungen zu diesem Thema sind beispielsweise in [Zet16] zu finden. In [HKZ14, KP16] dagegen wurden speziell die algebraischen Eigenschaften von (zuverlässigen) Warteschlangen-Speichern untersucht. In dieser Arbeit sollen im Gegensatz dazu spezielle Warteschlangen unter die Lupe genommen werden, deren Inhalt jederzeit teilweise vergessen werden kann.

Solche vergesslichen Warteschlangen (engl. “lossy queue” oder “lossy channel”) werden beispielsweise häufig in der Verifikation untersucht, da diese beispielsweise unzuverlässige Datenübertragungen modellieren. Obwohl auch hierfür nach [AJ94] LTL-Modelchecking unentscheidbar ist, sind einige wichtige Entscheidungsprobleme entscheidbar (z.B. Erreichbarkeit nach [AJ93]), während ihre Äquivalente für zuverlässige Warteschlangen unentscheidbar sind. Letzteres ist damit zu begründen, dass zuverlässige Warteschlangen-Systeme Turing-vollständig sind (siehe [BZ83]). Tatsächlich werden diese vergesslichen Warteschlangen auch in der Netzwerktechnik praktisch verwendet. So verwerfen Router zur Vorbeugung von Netzwerkstaus zufällig Pakete aus ihren Puffern, falls diese hinreichend groß werden (siehe [FJ93]). Dieses Vorgehen wird auch in gegenwärtig verwendeten Netzwerkprotokollen wie TCP/IP verwendet (siehe [Tan03]).

Der Fokus dieser Arbeit liegt auf den Einbettungen anderer Monoide in das Transformationsmonoid einer vergesslichen Warteschlange. Solche Einbettungen lassen sich interpretieren als Simulationen des Monoids (bzw. der zugrunde liegenden Datenstruktur) mithilfe einer vergesslichen Warteschlange. Die Ergebnisse

dieser Arbeit zeigen jedoch, dass sich viele Datenstrukturen (wie beispielsweise die zuverlässigen Warteschlangen) nicht durch vergessliche Warteschlangen simulieren lassen. Selbst vergessliche Warteschlangen über einem großen Alphabet lassen sich nicht durch solche mit kleinerem Alphabet simulieren.

Weiterhin werden die Spurmonoide nach [Maz77] untersucht, die sich in das Transformationsmonoid einer vergesslichen Warteschlange einbetten lassen. Diese Spurmonoide werden hauptsächlich als mathematisches Modell von nebenläufigen Systemen mit diversen Abhängigkeiten zwischen verschiedenen Ressourcen verwendet. Hierfür kann gezeigt werden, dass sich in vergessliche Warteschlangen über mindestens drei Symbolen exakt die gleichen Spurmonoide einbetten lassen wie in zuverlässige Warteschlangen und in das direkte Produkt zweier freier Monoide. Für die Warteschlangen mit kleinerem Alphabet wird gezeigt, dass die Klasse der einbettenden Spurmonoide echt kleiner ist als mit drei Symbolen. In allen Fällen wird jedoch eine entscheidbare Charakterisierung für die einbettenden Spurmonoide angegeben.

1.2 Aufbau der Arbeit

In Kapitel II werden erste Grundlagen aus der Monoidtheorie und Theorie der formalen Sprachen angegeben. Zudem wird darin auch das Transformationsmonoid zuverlässiger Warteschlangen modelliert und einige wichtige Ergebnisse aus [HKZ14] wiederholt. Kapitel III enthält dann die entsprechende Definition des Transformationsmonoids einer vergesslichen Warteschlange sowie erste einfache, aber dennoch immer wieder verwendete Aussagen über das Monoid und die zugrundeliegende Kongruenzrelation. Anschließend wird in Kapitel IV eine Normalform auf den Transformationen definiert sowie die Konkatenation zweier Transformationsfolgen untersucht. Ergebnis ist ein weiteres, einfacheres Monoid, welches isomorph zum ursprünglichen Transformationsmonoid ist. Kapitel V enthält eine zentrale Aussage über Homomorphismen in das Transformationsmonoid und deren (Nicht-)Injektivität. Diese Aussage wird im darauffolgenden Kapitel zum Beweis der Nicht-Einbettung des Transformationsmonoids über vielen Symbolen in solche mit wenigen Symbolen verwendet. In Kapitel VII wird anschließend das Verhältnis zu zuverlässigen Warteschlangen untersucht. Hierzu wird auch analog zu Kapitel V eine Aussage über Nicht-Einbettungen angegeben. Im letzten Kapitel werden noch die Einbettungen von Spurmonoiden analysiert. Hierbei wird unter anderem die Hauptaussage aus [KP16] um eine weitere Äquivalenz ergänzt.

KAPITEL II

Grundlagen

In diesem einführenden Kapitel sollen zunächst einige wichtige Definitionen und Aussagen angegeben werden, die im Verlauf dieser Arbeit benötigt werden.

2.1 Monoidtheorie

Ein **Monoid** ist ein Tupel (\mathcal{M}, \cdot) , wobei

- \mathcal{M} eine nicht-leere Menge ist,
- $\cdot: \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ eine Operation auf \mathcal{M} ist,
- $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ für alle $a, b, c \in \mathcal{M}$ gilt (d.h. \cdot ist assoziativ) und
- es ein $e_{\mathcal{M}} \in \mathcal{M}$ gibt mit $a \cdot e_{\mathcal{M}} = e_{\mathcal{M}} \cdot a = a$ für alle a . Das Element $e_{\mathcal{M}}$ wird als **neutrales Element** bezeichnet und ist eindeutig bestimmt.

Im Folgenden wird statt $a \cdot b$ auch kurz ab und anstelle von (\mathcal{M}, \cdot) einfach \mathcal{M} geschrieben.

Sei nun \mathcal{M} ein Monoid. Eine zweistellige Relation $\equiv \subseteq \mathcal{M}^2$ heißt eine **Äquivalenzrelation**, wenn \equiv reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Die zu $a \in \mathcal{M}$ zugehörige **Äquivalenzklasse** bzgl. \equiv ist dann $[a]_{\equiv} := \{b \in \mathcal{M} \mid a \equiv b\}$. Die Äquivalenzrelation \equiv heißt **Kongruenzrelation** (bzgl. \cdot), falls für alle $a, b, c, d \in \mathcal{M}$ mit $a \equiv b$ und $c \equiv d$ auch $ac \equiv bd$ gilt.

Sei nun \equiv eine Kongruenzrelation. Das Tupel $(\mathcal{M}/_{\equiv}, \cdot)$ mit

- $\mathcal{M}/_{\equiv} := \{[a]_{\equiv} \mid a \in \mathcal{M}\}$ und
- $[a]_{\equiv} \cdot [b]_{\equiv} := [ab]_{\equiv}$ für alle $[a]_{\equiv}, [b]_{\equiv} \in \mathcal{M}/_{\equiv}$

heißt dann **Quotient** von \mathcal{M} bzgl. \equiv und ist ein Monoid mit neutralem Element $[e_{\mathcal{M}}]_{\equiv}$.

Seien \mathcal{M} und \mathcal{N} Monoide. Ein **Homomorphismus** ist eine Abbildung $\phi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ mit der Eigenschaft $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ für alle $a, b \in \mathcal{M}$. Dann ist $\phi(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{N}$ wieder ein Monoid mit neutralem Element $\phi(e_{\mathcal{M}})$. Ein Homomorphismus ϕ heißt zudem **Einbettung**, falls ϕ injektiv ist. \mathcal{M} lässt sich dann in \mathcal{N} **einbetten**, falls es eine Einbettung $\phi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ gibt (in Zeichen: $\mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{N}$). Ist ϕ weiterhin bijektiv, so heißt ϕ ein **Isomorphismus**. Dann heißt \mathcal{M} **isomorph** zu

\mathcal{N} , falls ein Isomorphismus $\phi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ existiert (in Zeichen: $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$). Zudem ist das **direkte Produkt** von \mathcal{M} und \mathcal{N} definiert als $(\mathcal{M} \times \mathcal{N}, \cdot)$ mit

$$\cdot: (\mathcal{M} \times \mathcal{N})^2 \rightarrow \mathcal{M} \times \mathcal{N}: ((a, b), (c, d)) \mapsto (ac, bd)$$

und ist ebenfalls ein Monoid mit neutralem Element $(e_{\mathcal{M}}, e_{\mathcal{N}})$.

2.2 Wörter und Sprachen

Sei A ein Alphabet. Das **freie Monoid** über A ist die Menge der endlichen Wörter über A mit Konkatenation, wird mit A^* bezeichnet und besitzt das neutrale Element ε . Zudem ist $A^+ := A^* \setminus \{\varepsilon\}$. Seien $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_n \in A$ und $w = a_1 \dots a_n$. Dann ist die **Länge** von w definiert als $|w| := n$. Ein Wort $u \in A^*$ heißt **Präfix** von w , wenn es ein $v \in A^*$ gibt mit $w = uv$, d.h. wenn $w \in uA^*$ gilt. Da v in diesem Falle eindeutig bestimmt ist, wird auch $v = u^{-1}w$ geschrieben. Analog ist u **Suffix** von w , wenn $w = vu$ und $v = wu^{-1}$ gilt, d.h. wenn $w \in A^*u$ gilt. Zudem heißt u **Infix** von w , wenn es $v_1, v_2 \in A^*$ mit $w = v_1uv_2$ gibt, d.h. wenn $w \in A^*uA^*$ gilt. Des Weiteren heißt $u \in A^*$ ein **Teilwort** von w , falls $u = a_1 \dots a_n$ und $w = w_1a_1w_2a_2w_3 \dots w_na_nw_{n+1}$ für ein $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_n \in A$ und $w_1, \dots, w_{n+1} \in A^*$ gilt. Man schreibt hierfür auch kurz $u \preceq w$. Es ist leicht zu sehen, dass die Relation \preceq reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist, d.h. \preceq ist eine partielle Ordnung auf A^* . Für $w \in A^*$ definiere $\llbracket w \rrbracket$ als die Menge aller Teilwörter von w , d.h. $\llbracket w \rrbracket := \{u \in A^* \mid u \preceq w\}$.

Weiterhin wird $L \subseteq A^*$ als **Sprache** bezeichnet. Eine Sprache $L \subseteq A^*$ heißt dann **abel'sch**, wenn für alle $v, w \in L$ gilt: $vw = wv$. Die folgenden beiden Aussagen betreffen solche abel'schen Sprachen und werden in den kommenden Kapiteln mehrfach verwendet:

Proposition 2.1 ([LS62, Lemma 3]). *Seien A ein Alphabet und $L \subseteq A^*$ eine Sprache. Dann ist L abel'sch genau dann, wenn es ein $q \in A^+$ gibt mit $L \subseteq q^*$.*

Proposition 2.2 ([LS62, Korollar 4.1]). *Sei A ein Alphabet und seien $u, v, w \in A^+$ mit $w = vu$ und $uw = wu$. Dann gilt auch $vw = wv$.*

2.3 Semi-Thue-Systeme

Ein **Semi-Thue-System** ist ein Tupel $\mathcal{R} = (A, \rightarrow)$, wobei A ein Alphabet und $\rightarrow \subseteq A^* \times A^*$ eine Menge von Regeln ist. Im Folgenden wird auch kurz \rightarrow anstelle von (A, \rightarrow) geschrieben. Die Relation $\rightarrow_{\mathcal{R}} \subseteq A^* \times A^*$ ist dann wie folgt definiert:

Für alle $u, v \in A^*$ gilt $u \rightarrow_{\mathcal{R}} v$ genau dann, wenn es Wörter $x, y_1, y_2, z \in A^*$ mit $u = xy_1z$, $v = xy_2z$ und $y_1 \rightarrow y_2$ gibt. Zudem ist $\rightarrow_{\mathcal{R}}^* \subseteq A^* \times A^*$ der reflexiv-transitive Abschluss von $\rightarrow_{\mathcal{R}}$. Eine Folge $u_1 \rightarrow_{\mathcal{R}} u_2 \rightarrow_{\mathcal{R}} u_3 \rightarrow_{\mathcal{R}} \dots$ wird dann als **Ableitung** von u_1 bezeichnet. Ein Wort $u \in A^*$ heißt bzgl. der Regeln von \mathcal{R} **irreduzibel**, falls es kein $v \in A^*$ mit $u \rightarrow_{\mathcal{R}} v$ gibt.

Weiterhin heißt ein Semi-Thue-System \mathcal{R} :

- **terminierend** (im Englischen häufig “terminating”, “noetherian” oder “well-founded”), falls es keine unendlichen Ableitungen in \mathcal{R} gibt.
- **konfluent**, falls für alle $u, v_1, v_2 \in A^*$ mit $u \rightarrow_{\mathcal{R}}^* v_1$ und $u \rightarrow_{\mathcal{R}}^* v_2$ ein Wort $w \in A^*$ existiert mit $v_1 \rightarrow_{\mathcal{R}}^* w$ und $v_2 \rightarrow_{\mathcal{R}}^* w$. Die Konfluenz wird in der Literatur auch häufig als *Church-Rosser-Eigenschaft* bezeichnet.
- **lokal konfluent**, falls für alle $u, v_1, v_2 \in A^*$ mit $u \rightarrow_{\mathcal{R}} v_1$ und $u \rightarrow_{\mathcal{R}} v_2$ ein Wort $w \in A^*$ existiert mit $v_1 \rightarrow_{\mathcal{R}}^* w$ und $v_2 \rightarrow_{\mathcal{R}}^* w$.

Über diese Eigenschaften sind die folgenden Aussagen allgemein bekannt:

Proposition 2.3. *Sei \mathcal{R} ein Semi-Thue-System. Dann gilt:*

- (i) *Sei (A^*, \leq) eine Wohlordnung. Gilt für alle $l \rightarrow r$ auch $r < l$, so ist \mathcal{R} terminierend. ([BO93, Satz 2.2.4])*
- (ii) *Ist \mathcal{R} terminierend und lokal konfluent, so ist \mathcal{R} auch konfluent. (Newmans Lemma, [New42, Satz 1])*

Weitere Grundlagen zu Semi-Thue-Systemen finden sich unter anderem in [BO93, Jan12].

2.4 Zuverlässige Warteschlangen

In diesem Abschnitt sollen klassische (zuverlässige) Warteschlangen wie in [HKZ14] als Monoid modelliert werden. Um die Notationen später von ihren Äquivalenten für vergessliche Warteschlangen zu unterscheiden, werden diese im Folgenden stets mit dem Index r (für engl. “reliable”) versehen.

Die Warteschlangen-Einträge sollen als Elemente des endlichen Alphabets A betrachtet werden. Damit ist dann ein Wort aus A^* ein gültiger Zustand der Warteschlange. Im Falle ungültiger Leseoperationen soll die Warteschlange zudem in einen Fehlerzustand $\perp \notin A^*$ übergehen. Operationen auf der Warteschlange sind dann im Weiteren Schreiben des Symbols $a \in A$ (im Folgenden als a notiert) sowie Lesen des Symbols a (im Folgenden als \bar{a} notiert). Damit ergibt sich eine disjunkte Kopie \bar{A} der Symbole aus A . Die Menge aller Operationen ist dann $\Sigma := A \cup \bar{A}$ und somit ein Wort aus Σ^* eine Operationsfolge. Folgen von Leseoperationen $\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n$ werden hierbei auch als $\overline{a_1 \dots a_n}$ notiert.

Genauer sind die Operationen durch $\cdot : (A^* \cup \{\perp\}) \times \Sigma^* \rightarrow (A^* \cup \{\perp\})$ mit

$$q \cdot \varepsilon = q, \quad q \cdot au = qa \cdot u, \quad q \cdot \bar{a}u = \begin{cases} q' \cdot u & , \text{ falls } q = aq' \\ \perp & , \text{ sonst,} \end{cases} \quad \perp \cdot u = \perp$$

für alle $u \in \Sigma^*$, $a \in A$ und $q \in A^*$ definiert.

Definition 2.4. Die Kongruenzrelation $\equiv_r \subseteq (\Sigma^*)^2$ ist definiert wie folgt: Für alle $u, v \in \Sigma^*$ gelte $u \equiv_r v$ genau dann, wenn $q \cdot u = q \cdot v$ für alle $q \in A^*$ gilt.

Das **Transformationsmonoid einer zuverlässigen Warteschlange** über A ist dann $\mathcal{Q}_r^{(A)} := \Sigma^* / \equiv_r$.

Die Relation “ $u \equiv_r v$ ” für $u, v \in \Sigma^*$ ist letztlich so zu verstehen, dass u und v auf jeder beliebigen Warteschlange $q \in A^*$ stets denselben Effekt besitzen. Das Transformationsmonoid $\mathcal{Q}_r^{(A)}$ ist dann also die Menge aller unterschiedlichen Effekte über dem Alphabet A .

Seien nun A, B zwei Alphabete mit $|A| = |B| = n$. Dann sind offensichtlich $\mathcal{Q}_r^{(A)}$ und $\mathcal{Q}_r^{(B)}$ isomorph. Es wird deshalb auch im Folgenden einfach $\mathcal{Q}_r^{(n)}$ anstelle von $\mathcal{Q}_r^{(A)}$ geschrieben. In [HKZ14, Korollar 5.5] wurde gezeigt, dass für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ sich $\mathcal{Q}_r^{(n)}$ in $\mathcal{Q}_r^{(2)}$ einbetten lässt.

Satz 2.5 ([HKZ14, Satz 4.3]). Die Äquivalenzrelation \equiv_r ist die kleinste Kongruenz auf Σ^* , die für alle $a, b, c \in A$ die folgenden Bedingungen erfüllt:

- (i) $a\bar{b} \equiv_r \bar{b}a$, falls $a \neq b$,
- (ii) $a\bar{b}c \equiv_r \bar{b}a\bar{c}$ und
- (iii) $ab\bar{c} \equiv_r a\bar{c}b$.

Es soll nun eine Normalform für die Operationsfolgen bzgl. \equiv_r angegeben werden. Dazu ist zunächst die Definition eines *Shuffles* zweier Wörter gleicher Länge notwendig. Seien also $k \in \mathbb{N}$ und $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k \in A$. Dann definiere:

$$\langle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_k, \overline{\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \dots \mathbf{b}_k} \rangle := a_1 \bar{b}_1 a_2 \bar{b}_2 \dots a_k \bar{b}_k.$$

Für ein Wort $u \in \Sigma^*$ wird die Normalform $\mathbf{nf}_r(\mathbf{u}) \in \Sigma^*$ definiert als das Wort $\mathbf{nf}_r(u) = \bar{u}_1 \langle u_2, \bar{u}_2 \rangle u_3$, das sich aus eindeutig bestimmten Wörtern $u_1, u_2, u_3 \in A^*$ zusammensetzt, sodass $u \equiv_r \bar{u}_1 \langle u_2, \bar{u}_2 \rangle u_3$ gilt. Hierbei bezeichne zudem

$$\lambda(\mathbf{u}) := u_1, \quad \mu(\mathbf{u}) := u_2 \quad \text{und} \quad \nu(\mathbf{u}) := u_3,$$

wobei $\lambda(u)$ auch als *Anfangsstück*, $\mu(u)$ als *Shuffleteil* und $\nu(u)$ als *Endstück* der Normalform von u bezeichnet wird. Dann ist $\mathbf{NF}_r^{(n)} := \{\mathbf{nf}_r(u) \mid u \in \Sigma^*\}$ mit $|A| = n$.

Die folgenden beiden Projektionen werden im Verlauf dieser Arbeit immer wieder benötigt:

Definition 2.6. Die Projektionen $\pi, \bar{\pi}: \Sigma^* \rightarrow A^*$ auf die Schreib- bzw. Leseoperationen sind wie folgt induktiv definiert:

- $\bar{\pi}(ua) = \bar{\pi}(u)$, $\bar{\pi}(u\bar{a}) = \bar{\pi}(u)a$, $\bar{\pi}(\varepsilon) = \varepsilon$ für $u \in \Sigma^*$ und $a \in A$.
- $\pi(ua) = \pi(u)a$, $\pi(u\bar{a}) = \pi(u)$, $\pi(\varepsilon) = \varepsilon$ für $u \in \Sigma^*$ und $a \in A$.

Mithilfe dieser Definition ergeben sich zwei weitere Charakterisierungen der Äquivalenzklassen bzgl. \equiv_r , mit denen immer wieder gearbeitet wird:

Satz 2.7 ([HKZ14, Satz 4.3]). *Seien $u, v \in \Sigma^*$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (i) $u \equiv_r v$.
- (ii) $\text{nf}_r(u) = \text{nf}_r(v)$.
- (iii) $\pi(u) = \pi(v)$, $\bar{\pi}(u) = \bar{\pi}(v)$ und $\mu(u) = \mu(v)$.

Insbesondere folgt aus diesem Satz für die beiden Projektionen oben auch

$$\bar{\pi}(u) = \lambda(u)\mu(u) \quad \text{und} \quad \pi(u) = \mu(u)\nu(u)$$

für alle $u \in \Sigma^*$.

Nun soll noch die Normalform der Konkatenation zweier Operationsfolgen betrachtet werden. Dazu definiere zunächst für $u, v \in A^*$ das Wort $\mathbf{ol}_r(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in A^*$ (“ol” für engl. “overlap”, d.h. “Überlappung”) als das längste Präfix von u , dass gleichzeitig Suffix von v ist. Es gilt die folgende Aussage:

Satz 2.8 ([HKZ14, Satz 5.4]). *Seien $u, v \in \Sigma^*$ zwei Wörter sowie $s := \mathbf{ol}_r(\pi(u)\mu(v), \mu(u)\bar{\pi}(v))$. Dann gilt:*

$$\text{nf}_r(uv) = \overline{\bar{\pi}(uv)s^{-1}} \langle s, \bar{s} \rangle s^{-1} \pi(uv).$$

Beachte, dass in diesem Satz s so definiert ist, dass es Suffix von $\mu(u)\bar{\pi}(v)$ und Präfix von $\pi(u)\mu(v)$ ist. Die Verwendung des imaginären inversen Elements s^{-1} ist also durchaus legitim. Der Satz ist dann so zu verstehen, dass die Normalform von uv so aufgebaut ist, dass der Shuffleteil $\mu(uv)$ maximale Länge besitzt, wobei das Anfangsstück $\lambda(u)$ von u und das Endstück $\nu(v)$ von v weiterhin jeweils vollständig im Anfangs- bzw. Endstück der Normalform von uv stehen.

KAPITEL III

Vergessliche Warteschlangen

3.1 Definition des Transformationsmonoids

In diesem Kapitel sollen analog zu den zuverlässigen Warteschlangen auch vergessliche Warteschlangen als Monoid modelliert werden. Die verwendeten Notationen aus Abschnitt 2.4 sollen hierbei weiter verwendet werden. Zur besseren Unterscheidung der Definitionen wird im Folgenden der Index ℓ (für engl. “lossy”) anstelle von r verwendet.

Zuerst soll dazu eine Transitionsrelation für diese vergesslichen Warteschlangen definiert werden:

Definition 3.1. Definiere die Transitionsrelation einer vergesslichen Warteschlange $\vdash \subseteq (A^* \times \Sigma^*)^2$ wie folgt:

(T1) $(q, au) \vdash (qa, u)$ für alle $q \in A^*$, $u \in \Sigma^*$ und $a \in A$.

(T2) $(aq, \bar{a}u) \vdash (q, u)$ für alle $q \in A^*$, $u \in \Sigma^*$ und $a \in A$.

(T3) $(q, u) \vdash (q', u)$ für alle $q, q' \in A^*$ und $u \in \Sigma^*$ mit $q' \preceq q$.

Weiterhin definiere die Abbildung

$$\Delta: A^* \times \Sigma^* \rightarrow 2^{A^*} : (q, u) \mapsto \{q' \in A^* \mid (q, u) \vdash^* (q', \varepsilon)\},$$

wobei \vdash^* der reflexiv-transitive Abschluss von \vdash ist.

Die Transitionsregeln (T1) und (T2) entsprechen offensichtlich den Schreib- bzw. Leseoperationen einer zuverlässigen Warteschlange und sind demnach deterministisch. Erst mit dem dritten Transitionstypen (T3), welcher letztendlich das Vergessen der Warteschlange simuliert, indem beliebige Symbole aus dem Zustand verschwinden, wird das Transitionssystem (im Gegensatz zu den zuverlässigen Warteschlangen) nicht-deterministisch. Für einen Zustand $q \in A^*$ der Warteschlange und eine Operationsfolge $u \in \Sigma^*$ ist dann $\Delta(q, u)$ die Menge aller Zustände der Warteschlange, die von q aus unter Anwendung aller Operationen aus u sowie beliebiger Schritte des Vergessens erreicht werden können.

Beispiel. Betrachte die Warteschlange $q = aab$ mit Operationsfolge $u = \bar{b}a\bar{b}$. Dann sind unter anderem die folgenden Transitionsfolgen möglich:

- $(aab, \overline{bab}) \stackrel{(T1)}{\vdash} (aabb, \overline{ab}) \stackrel{(T2)}{\vdash} (abb, \overline{b}) \stackrel{(T3)}{\vdash} (bb, \overline{b}) \stackrel{(T2)}{\vdash} (b, \varepsilon),$
- $(aab, \overline{bab}) \stackrel{(T3)}{\vdash} (a, \overline{bab}) \stackrel{(T1)}{\vdash} (ab, \overline{ab}) \stackrel{(T2)}{\vdash} (b, \overline{b}) \stackrel{(T2)}{\vdash} (\varepsilon, \varepsilon).$

Weiterhin lässt sich zeigen, dass $\Delta(q, u) = \{b, \varepsilon\} = \llbracket b \rrbracket$ gilt.

Das folgende Lemma besagt, dass die Dekomposition von Operationsfolgen äquivalent möglich ist. Dies ist relativ technisch, aber auch typisch in der Automatentheorie:

Lemma 3.2. *Seien $q \in A^*$ und $u, v \in \Sigma^*$. Dann gilt:*

$$\underbrace{\bigcup_{q' \in \Delta(q, u)} \Delta(q', v)}_{=: \Delta(\Delta(q, u), v)} = \Delta(q, uv).$$

Beweis. “ \subseteq ”: Sei $p \in \Delta(\Delta(q, u), v)$. Dann gibt es ein $q' \in A^*$ und Transitionsfolgen $(q, u) \vdash^* (q', \varepsilon)$ und $(q', v) \vdash^* (p, \varepsilon)$. Dann gilt aber nach Definition von \vdash auch $(q, uv) \vdash^* (q', v)$ und damit $(q, uv) \vdash^* (p, \varepsilon)$. Also gilt $p \in \Delta(q, uv)$.

“ \supseteq ”: Sei $p \in \Delta(q, uv)$, d.h. $(q, uv) \vdash^* (p, \varepsilon)$. Nach Definition von \vdash gibt es dann ein $q' \in A^*$ mit $(q, uv) \vdash^* (q', v) \vdash^* (p, \varepsilon)$. Damit gilt auch $(q, u) \vdash^* (q', \varepsilon)$ und somit $q' \in \Delta(q, u)$. Also gilt $p \in \Delta(\Delta(q, u), v)$. ■

Im Wesentlichen soll nun damit wieder eine Kongruenzrelation auf Σ^* definiert werden, sodass $u, v \in \Sigma^*$ genau dann äquivalent sind, wenn $\Delta(q, u) = \Delta(q, v)$ für alle $q \in A^*$ gilt. Um aber in den folgenden Kapiteln eine ähnliche Notation wie in Abschnitt 2.4 verwenden zu können, soll zunächst einmal eine ähnliche Operationsfunktion definiert werden:

Definition 3.3. Sei $\perp \notin A$. Dann definiere die Abbildung

$$\circ: (A^* \cup \{\perp\}) \times \Sigma^* \rightarrow (A^* \cup \{\perp\})$$

wie folgt:

- (i) $q \circ \varepsilon = q,$
- (ii) $q \circ au = qa \circ u,$
- (iii) $q \circ \overline{au} = \begin{cases} q'' & , \text{ falls } q' \in (A \setminus \{a\})^*, q'' \in A^* \text{ mit } q = q'aq'' \text{ existieren} \\ \perp & , \text{ sonst,} \end{cases}$
- (iv) $q \circ \perp = \perp$

für alle $q \in A^*$, $u \in \Sigma^*$ und $a \in A$.

Zunächst scheint kein sonderlich großer Zusammenhang zwischen der Menge $\Delta(q, u) \subseteq 2^{A^*}$ und dem Wort $q \circ u \in A^* \cup \{\perp\}$ ersichtlich zu sein. Diese Beziehung soll jedoch im Folgenden aufgedeckt werden.

Beispiel. Für $q = aab$ und $u = \overline{bab}$ gilt:

$$q \circ u = aab \circ \overline{bab} = aabb \circ \overline{ab} = abb \circ \overline{b} = b \circ \varepsilon = b.$$

Im vorigen Beispiel wurde bereits $\Delta(q, u) = \llbracket b \rrbracket$ gezeigt. Es gilt also

$$\Delta(aab, \overline{bab}) = \llbracket aab \circ \overline{bab} \rrbracket.$$

Es wird nun bewiesen, dass der Zusammenhang zwischen $\Delta(q, u)$ und $q \circ u$ aus dem Beispiel sich für beliebige $q \in A^*$ und $u \in \Sigma^*$ verallgemeinern lässt. Somit ist $q \circ u$ die längstmögliche Warteschlange, die aus q durch Ausführen der Operationen u entstehen kann (d.h. die Anzahl der vergessenen Symbole ist minimal). $q \circ u$ ist also als eine “optimistische Determinisierung” aller möglicher Abläufe der Warteschlange q mit den Operationen u (d.h. von $\Delta(q, u)$) zu verstehen: Es werden nur bei Leseoperationen Symbole vergessen. Dabei wird auch nur ein Präfix der Warteschlange vergessen. Dieses Präfix ist genau so lang, wie für das Lesen des gewünschten Symbols notwendig ist (d.h. bis zum ersten Vorkommen des gewünschten Symbols in der Warteschlange).

Ein erstes Lemma betrifft dabei alle Fälle, in denen die vergessliche Warteschlange mindestens eine Transitionsfolge besitzt, in der sämtliche Operationen ausgeführt werden können (d.h. durch die die Warteschlange nicht im Fehlerzustand endet). Genauer ist $\Delta(q, u)$ genau die Menge aller Teilwörter von $q \circ u$.

Lemma 3.4. *Seien $q \in A^*$ und $u \in \Sigma^*$ mit $q \circ u \neq \perp$. Dann gilt*

$$\Delta(q, u) = \llbracket q \circ u \rrbracket \neq \emptyset.$$

Beweis. Aufgrund der Transitivität von \preceq können mehrere aufeinanderfolgende Vergessens-Transitionen (Typ (T3)) zu einer zusammengefasst werden. Weil \preceq zudem reflexiv ist und damit auch \vdash , kann an beliebiger Position einer Transitionsfolge eine Vergessens-Transition eingefügt werden. Somit kann im Folgenden angenommen werden, dass vor und nach einer Schreib- bzw. Leseoperation stets eine Vergessens-Transition ausgeführt wird.

Die gewünschte Aussage soll nun per Induktion nach $|u|$ geführt werden.

Sei also zunächst $|u| = 0$. Dann gilt $q \circ u = q \circ \varepsilon = q$. Die Aussage “ $\Delta(q, u) \supseteq \llbracket q \rrbracket$ ” folgt unmittelbar durch Anwendung von Regel (T3). “ $\Delta(q, u) \subseteq \llbracket q \rrbracket$ ” folgt dagegen direkt aus der Tatsache, dass keine der anderen beiden Regeln angewendet werden kann und somit für alle $(q, \varepsilon) \vdash (q', \varepsilon)$ gilt $q' \preceq q$.

Sei nun $|u| \geq 1$. Dann gibt es ein $\alpha \in \Sigma$ und $u' \in \Sigma^*$ mit $u = u'\alpha$. Definiere $q_1 := q \circ u'$. Nach Induktionsvoraussetzung und Lemma 3.2 gilt

$$\Delta(q, u) = \Delta(q, u'\alpha) = \Delta(\Delta(q, u'), \alpha) \stackrel{\text{(IV)}}{=} \Delta(\llbracket q \circ u' \rrbracket, \alpha) = \Delta(\llbracket q_1 \rrbracket, \alpha). \quad (3.1)$$

Es muss nun noch $\Delta(\llbracket q_1 \rrbracket, \alpha) = \llbracket q_1 \circ \alpha \rrbracket = \llbracket q \circ u \rrbracket$ gezeigt werden. Betrachte dazu die folgende Fallunterscheidung:

(Fall 1) Es gilt $\alpha = a$ für ein $a \in A$.

“ \subseteq ”: Sei $p \in \Delta(\llbracket q_1 \rrbracket, a)$. Dann gibt es ein $p_1 \in \llbracket q_1 \rrbracket$ mit $p \in \Delta(p_1, a)$, d.h. $(p_1, a) \vdash^* (p, \varepsilon)$. Es gibt somit $p_2 \in A^*$ mit

$$(p_1, a) \stackrel{(T3)}{\vdash} (p_2, a) \stackrel{(T1)}{\vdash} (p_2 a, \varepsilon) \stackrel{(T3)}{\vdash} (p, \varepsilon),$$

wobei $p_2 \preceq p_1$, $p \preceq p_2 a$ und damit

$$p \preceq p_2 a \preceq p_1 a \preceq q_1 a = q_1 \circ a = (q \circ u') \circ a = q \circ u$$

gilt. Also gilt $p \in \llbracket q_1 a \rrbracket = \llbracket q \circ u \rrbracket$.

“ \supseteq ”: Sei $p \in \llbracket q_1 a \rrbracket$. Dann gilt $p \preceq q_1 a$ und somit:

$$(q, u) \vdash^* (q_1, a) \stackrel{(T1)}{\vdash} (q_1 a, \varepsilon) \stackrel{(T3)}{\vdash} (p, \varepsilon),$$

d.h. $p \in \Delta(\llbracket q_1 \rrbracket, a) \stackrel{(3.1)}{=} \Delta(q, u)$.

(Fall 2) Es gilt $\alpha = \bar{a}$ für ein $a \in A$. Wegen $q \circ u \neq \perp$ muss es also $q_2 \in (A \setminus \{a\})^*$ und $q_3 \in A^*$ geben mit $q_1 = q_2 a q_3$ und $q \circ u = q_1 \circ \bar{a} = q_3$.

“ \subseteq ”: Sei $p \in \Delta(\llbracket q_1 \rrbracket, \bar{a})$. Dann gibt es ein $p_1 \in \llbracket q_1 \rrbracket$ mit $p \in \Delta(p_1, \bar{a})$, d.h. $(p_1, \bar{a}) \vdash^* (p, \varepsilon)$. Es gibt somit $p_2 \in A^*$ mit

$$(p_1, \bar{a}) \stackrel{(T3)}{\vdash} (ap_2, \bar{a}) \stackrel{(T2)}{\vdash} (p_2, \varepsilon) \stackrel{(T3)}{\vdash} (p, \varepsilon),$$

wobei $ap_2 \preceq p_1 \preceq q_1$, $p \preceq p_2$ und damit

$$p \preceq p_2 = ap_2 \circ \bar{a} \preceq p_1 \circ \bar{a} \preceq q_1 \circ \bar{a} = q_3$$

gilt. Also gilt $p \in \llbracket q_3 \rrbracket = \llbracket q \circ u \rrbracket$.

“ \supseteq ”: Sei $p \in \llbracket q_3 \rrbracket$. Dann gilt $p \preceq q_3$ und damit:

$$(q, u) \vdash^* (q_1, \bar{a}) \stackrel{(T3)}{\vdash} (aq_3, \bar{a}) \stackrel{(T2)}{\vdash} (q_3, \varepsilon) \stackrel{(T3)}{\vdash} (p, \varepsilon),$$

d.h. $p \in \Delta(\llbracket q_1 \rrbracket, \bar{a}) \stackrel{(3.1)}{=} \Delta(q, u)$.

Somit gilt also in beiden Fällen $\Delta(q, u) = \llbracket q \circ u \rrbracket$. ■

Das nächste Lemma betrifft nun noch den übrig gebliebenen Fall, in dem die vergessliche Warteschlange nicht alle Operationen abarbeiten kann und somit in einem Fehlerzustand endet.

Lemma 3.5. *Seien $q \in A^*$ und $u \in \Sigma^*$ mit $q \circ u = \perp$. Dann gilt $\Delta(q, u) = \emptyset$.*

Beweis. Seien $u_1, u_2 \in \Sigma^*$ und $a \in A$ mit $u = u_1 \bar{a} u_2$, $q \circ u_1 \neq \perp$ und $q \circ u_1 \bar{a} = \perp$, d.h. \bar{a} ist die erste Operation, die die Warteschlange in den Fehlerzustand überführt. Es gilt also $q \circ u_1 \in (A \setminus \{a\})^*$. Nach den Lemmata 3.2 und 3.4 gilt dann

$$\Delta(q, u) = \Delta(\Delta(q, u_1), \bar{a}u_2) = \Delta(\llbracket q \circ u_1 \rrbracket, \bar{a}u_2).$$

Sei nun $p \in \llbracket q \circ u_1 \rrbracket$. Wegen $q \circ u_1 \in (A \setminus \{a\})^*$ und $p \preceq q \circ u_1$ gilt auch $p \in (A \setminus \{a\})^*$. Dann gilt für alle $p' \in A^*$ auch

$$(q \circ u_1, \bar{a}u_2) \stackrel{(T3)}{\vdash} (p, \bar{a}u_2) \not\vdash (p', u_2).$$

Somit gilt $p' \notin \Delta(q, u)$, d.h. $\Delta(q, u) = \emptyset$. ■

Die beiden Lemmata lassen sich also wie folgt zusammenfassen:

Proposition 3.6. *Seien $q \in A^*$ und $u \in \Sigma^*$. Dann gilt:*

$$\Delta(q, u) = \begin{cases} \llbracket q \circ u \rrbracket & , \text{ falls } q \circ u \neq \perp \\ \emptyset & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Damit muss im Folgenden also nicht mehr die vollständige Menge $\Delta(q, u)$ betrachtet werden, sondern mit $q \circ u$ jeweils nur ein einzelnes Wort. Schlussendlich kann nun analog zu $\mathcal{Q}_r^{(n)}$ mithilfe der Funktion \circ auch das Transformationsmonoid einer vergesslichen Warteschlange definiert werden:

Definition 3.7. Definiere die Kongruenzrelation $\equiv_\ell \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ wie folgt: Für $u, v \in \Sigma^*$ gelte $u \equiv_\ell v$ genau dann, wenn für alle $q \in A^*$ gilt: $q \circ u = q \circ v$.

Dann definiere $\mathcal{Q}_\ell^{(A)} := \Sigma^* / \equiv_\ell$ als das sogenannte **Transformationsmonoid** einer vergesslichen Warteschlange.

Die Definitionen von \equiv_ℓ und $\mathcal{Q}_\ell^{(A)}$ sind genauso wie für zuverlässige Warteschlangen zu interpretieren. Das heißt, es gilt $u \equiv_\ell v$ genau dann, wenn u und v dieselben Effekte auf jeder beliebigen Warteschlange besitzen, und $\mathcal{Q}_\ell^{(A)}$ ist die Menge aller Effekte über dem Alphabet A .

Aus der Definition von \circ ist weiterhin leicht ersichtlich, dass im Falle $|A| = 1$ für alle $q \in A^*$ und $u \in \Sigma^*$ gilt: $q \cdot u = q \circ u$. Also ist $\mathcal{Q}_\ell^{(A)} = \mathcal{Q}_r^{(A)}$. Dies ist isomorph zu einem partiell blinden Zähler und wird deshalb hier nicht genauer betrachtet. Es wird also im Folgenden stets $|A| \geq 2$ angenommen.

Beachte, dass für zwei Alphabete A, B mit $|A| = |B| = n$ auch hier die Transformationsmonoide $\mathcal{Q}_\ell^{(A)}$ und $\mathcal{Q}_\ell^{(B)}$ wie bei zuverlässigen Warteschlangen zueinander isomorph sind. Analog wird deshalb im Folgenden stets $\mathcal{Q}_\ell^{(n)}$ anstelle von $\mathcal{Q}_\ell^{(A)}$ verwendet.

3.2 Wichtige Eigenschaften

Zum Abschluss dieses Kapitels sollen noch ein paar einfache, aber dennoch wichtige und immer wieder verwendete Aussagen über die Äquivalenz zweier Operations-

folgen $u, v \in \Sigma^*$ getroffen werden. Zunächst sollen analog zu Satz 2.5 Regeln zur Permutation der Operationen angegeben werden.

Lemma 3.8. *Seien $a, b \in A$. Dann gilt:*

$$(i) \quad a\bar{a}\bar{b} \equiv_{\ell} \bar{a}a\bar{b}.$$

$$(ii) \quad a\bar{b} \equiv_{\ell} \bar{b}a \text{ für } a \neq b.$$

$$(iii) \quad awa\bar{a} \equiv_{\ell} aw\bar{a}a \text{ für alle } w \in A^*.$$

Beweis.

(i) Sei $q \in A^*$ beliebig. Ist $q \in (A \setminus \{a\})^*$, so gilt:

$$\begin{aligned} q \circ a\bar{a}\bar{b} &= qa \circ \bar{a}\bar{b} = \varepsilon \circ \bar{b} = \perp & \text{und} \\ q \circ \bar{a}a\bar{b} &= \perp. \end{aligned}$$

Gelte nun $a \preceq q$, d.h. es existieren $q_1 \in (A \setminus \{a\})^*$ und $q_2 \in A^*$ mit $q = q_1aq_2$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} q \circ a\bar{a}\bar{b} &= q_1aq_2a \circ \bar{a}\bar{b} = q_2a \circ \bar{b} & \text{und} \\ q \circ \bar{a}a\bar{b} &= q_1aq_2 \circ \bar{a}a\bar{b} = q_2 \circ a\bar{b} = q_2a \circ \bar{b}. \end{aligned}$$

Es gilt also in allen Fällen $q \circ a\bar{a}\bar{b} = q \circ \bar{a}a\bar{b}$.

(ii) Sei $q \in A^*$ beliebig. Ist $q \in (A \setminus \{b\})^*$, so gilt:

$$\begin{aligned} q \circ a\bar{b} &= qa \circ \bar{b} = \perp & \text{und} \\ q \circ \bar{b}a &= \perp. \end{aligned}$$

Gelte nun $b \preceq q$, d.h. es existieren $q_1 \in (A \setminus \{b\})^*$ und $q_2 \in A^*$ mit $q = q_1bq_2$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} q \circ a\bar{b} &= q_1bq_2a \circ \bar{b} = q_2a & \text{und} \\ q \circ \bar{b}a &= q_1bq_2 \circ \bar{b}a = q_2 \circ a = q_2a. \end{aligned}$$

Es gilt also in allen Fällen $q \circ a\bar{b} = q \circ \bar{b}a$.

(iii) Sei $q \in A^*$ beliebig. Ist $q \in (A \setminus \{a\})^*$, so gilt:

$$\begin{aligned} q \circ awa\bar{a} &= qawa \circ \bar{a} = wa & \text{und} \\ q \circ aw\bar{a}a &= qaw \circ \bar{a}a = w \circ a = wa. \end{aligned}$$

Gelte nun $a \preceq q$, d.h. es existieren $q_1 \in (A \setminus \{a\})^*$ und $q_2 \in A^*$ mit $q = q_1aq_2$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} q \circ awa\bar{a} &= q_1aq_2awa \circ \bar{a} = q_2awa & \text{und} \\ q \circ aw\bar{a}a &= q_1aq_2aw \circ \bar{a}a = q_2aw \circ a = q_2awa. \end{aligned}$$

Es gilt also in allen Fällen $q \circ awa\bar{a} = q \circ aw\bar{a}a$. ■

Beachte, dass sich die Äquivalenzen aus Lemma 3.8 von denen aus Satz 2.5 unterscheiden. Beispielsweise gilt für $a \neq b$ $ba\bar{a} \equiv_r b\bar{a}a$ und $ba\bar{a} \not\equiv_\ell b\bar{a}a$, weil $\varepsilon \circ ba\bar{a} = \varepsilon$ und $\varepsilon \circ b\bar{a}a = \perp$ gilt. Somit folgt dann auch $\equiv_\ell \neq \equiv_r$.

Durch iterierte Anwendung von Lemma 3.8(ii) und (iii) ergibt sich letztendlich für alle $a \in A$ und $w \in A^*$ noch die Äquivalenz:

$$awa\bar{a} \equiv_\ell a\bar{a}wa.$$

Weiterhin kann aus diesen drei Äquivalenzen wie in [HKZ14, Kapitel 4] eine Normalform definiert und sogar berechnet werden. Diese wird in Kapitel IV genauer untersucht.

Das folgende Lemma wird dann für einige folgende Beweise benötigt und betrifft die Projektionen π und $\bar{\pi}$:

Lemma 3.9. *Seien $u, v \in \Sigma^*$ mit $u \equiv_\ell v$. Dann gilt:*

$$(i) \quad \bar{\pi}(u) = \bar{\pi}(v).$$

$$(ii) \quad \pi(u) = \pi(v).$$

Beweis.

- (i) Es soll die Kontraposition der Aussage gezeigt werden. Seien also $u, v \in \Sigma^*$ mit $\bar{\pi}(u) \neq \bar{\pi}(v)$. O.B.d.A. kann angenommen werden, dass $|\bar{\pi}(u)| \leq |\bar{\pi}(v)|$ gilt. Da dann $\bar{\pi}(v) \neq \varepsilon$ gilt, gibt es ein $a \in A$ mit $\bar{\pi}(v) \in A^*a$. Sei $b \in A \setminus \{a\}$ beliebig. Dann gilt für $q := \bar{\pi}(u)b^{|\bar{\pi}(v)|}$:

$$q \circ u = \bar{\pi}(u)b^{|\bar{\pi}(v)|} \circ u = b^{|\bar{\pi}(v)|}\pi(u) \quad \text{und} \quad |q \circ u| = |v| + |\pi(u)| \geq |v|.$$

Betrachte nun $q \circ v$. Wegen $\bar{\pi}(u) \neq \bar{\pi}(v)$ und $|\bar{\pi}(u)| \leq |\bar{\pi}(v)|$ muss die Warteschlange $\bar{\pi}(u)$ bei Operationsfolge $\bar{\pi}(v)$ im Fehlerzustand enden oder mindestens einmal ein Symbol vergessen, d.h. es gilt $\bar{\pi}(u) \circ \bar{\pi}(v) = \perp$. Wegen $\bar{\pi}(v) \in A^*a$ gilt somit auch $\bar{\pi}(u)b^{|\bar{\pi}(v)|} \circ \bar{\pi}(v) = \perp$. Falls $q \circ v = \perp$ gilt, so gilt $q \circ v \neq q \circ u$. Andernfalls gilt:

$$|q \circ v| \leq |\pi(v)| < |v| \leq |q \circ u|$$

und damit $q \circ u \neq q \circ v$, d.h. $u \not\equiv_\ell v$.

- (ii) Erneut soll die Kontraposition gezeigt werden. Seien also $u, v \in \Sigma^*$ mit $\pi(u) \neq \pi(v)$. Gilt $\bar{\pi}(u) \neq \bar{\pi}(v)$, so gilt nach (i) auch $u \not\equiv_\ell v$. Gelte also nun $\bar{\pi}(u) = \bar{\pi}(v)$. Dann gilt:

$$\bar{\pi}(u) \circ u = \pi(u) \neq \pi(v) = \bar{\pi}(v) \circ v = \bar{\pi}(u) \circ v,$$

also $u \not\equiv_\ell v$. ■

Die umgekehrte Implikation von Lemma 3.9 gilt im Übrigen nicht. So besitzen beispielsweise $ba\bar{a}$ und $b\bar{a}a$ gleiche Projektionen, sind aber wie bereits oben erwähnt nicht zueinander äquivalent. Im nächsten Kapitel wird aber ein einfaches, drittes Kriterium angegeben, das mit diesen beiden Gleichungen zusammen auch die Äquivalenz zweier Wörter impliziert.

KAPITEL IV

Das Monoid der Normalformen

In diesem Kapitel soll eine Normalform für die Äquivalenzklassen bzgl. \equiv_ℓ definiert werden. Gesucht ist also eine möglichst einfache und berechenbare Abbildung $\text{nf}: \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$, sodass für alle $u, v \in \Sigma^*$ genau dann $u \equiv_\ell v$ gilt, wenn auch $\text{nf}(u) = \text{nf}(v)$ gilt. Im ersten Abschnitt wird hierfür eine Berechnungsvorschrift angegeben, deren Eindeutigkeit im zweiten Teil bewiesen wird. Zuletzt wird in diesem Kapitel mit der Konkatenation noch eine Operation auf den Normalformen betrachtet. Das Ergebnis dieser Untersuchung ist schließlich ein Monoid, das isomorph zu $\mathcal{Q}_\ell^{(n)}$ ist, aber in Einbettungen anderer Monoide deutlich leichter zu handhaben ist.

4.1 Definition der Normalform

Zuerst soll die Grundmenge des Normalformen-Monoids definiert werden. Dazu definiere zunächst das Semi-Thue-System \mathcal{R}_ℓ mithilfe der Äquivalenzen aus Lemma 3.8 durch die folgenden Regeln:

- $a\bar{b} \rightarrow \bar{b}a$ für $a \neq b, a, b \in A$,
- $a\bar{a}\bar{b} \rightarrow \bar{a}\bar{a}\bar{b}$ für $a, b \in A$ und
- $awa\bar{a} \rightarrow aw\bar{a}\bar{a}$ für $a \in A$ und $w \in A^*$.

Die Anwendung einer Regel aus \mathcal{R}_ℓ führt damit eine bzgl. \equiv_ℓ äquivalente Umformung von Operationsfolgen durch, d.h. für alle $u, v \in \Sigma^*$ mit $u \rightarrow_{\mathcal{R}_\ell}^* v$ gilt auch $u \equiv_\ell v$. Hierbei wird versucht, Leseoperationen so früh wie möglich auszuführen, ohne die Äquivalenz-Bedingung zu verletzen.

Beispiel. Betrachte das Wort $u = bab\bar{b}\bar{a}\bar{a}$. Dann gibt es unter anderem die folgende Ableitung:

$$\begin{aligned} bab\bar{b}\bar{a}\bar{a} &\rightarrow_{\mathcal{R}_\ell} bab\bar{b}\bar{a}\bar{a} \rightarrow_{\mathcal{R}_\ell} bab\bar{a}\bar{b}\bar{a} \rightarrow_{\mathcal{R}_\ell} bab\bar{a}\bar{a}\bar{b} \rightarrow_{\mathcal{R}_\ell} b\bar{b}\bar{a}\bar{a}\bar{a}\bar{b} \\ &\rightarrow_{\mathcal{R}_\ell} b\bar{b}\bar{a}\bar{a}\bar{a}\bar{b} \rightarrow_{\mathcal{R}_\ell} \bar{b}\bar{b}\bar{a}\bar{a}\bar{a}\bar{b} \rightarrow_{\mathcal{R}_\ell} \bar{b}\bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{a}\bar{b}. \end{aligned}$$

Das Wort $\bar{b}\bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{a}\bar{b}$ ist irreduzibel bzgl. der Regeln von \mathcal{R}_ℓ .

Fraglich ist nun allerdings, ob überhaupt für alle Wörter ein solches äquivalentes, irreduzibles Wort existiert und ob dieses auch eindeutig bestimmt ist. Da die Regelmengemenge \mathcal{R}_ℓ unendlich groß ist, ist im positiven Falle aber auch nicht klar, dass aus

einem beliebigen Wort auch die zugehörige Normalform berechnet werden kann. In einem ersten Lemma wird gezeigt, dass die Normalform für ein Wort tatsächlich eindeutig existiert und Ableitungen stets endliche Länge haben.

Lemma 4.1. \mathcal{R}_ℓ ist terminierend und konfluent.

Beweis. Zunächst soll gezeigt werden, dass \mathcal{R}_ℓ terminierend ist. Dazu definiere eine lineare Ordnung \leq auf Σ mit $\bar{a} \leq b$ für alle $a, b \in A$. Dann sei (Σ^*, \leq) die bzgl. \leq lexikografische Ordnung auf Σ^* . Da diese Ordnung wohlfundiert ist und für jede Regel $l \rightarrow r$ in \mathcal{R}_ℓ auch $r < l$ gilt, ist nach Proposition 2.3 \mathcal{R}_ℓ terminierend.

Für die Konfluenz von \mathcal{R}_ℓ genügt es nach Newmans Lemma zu zeigen, dass \mathcal{R}_ℓ lokal konfluent ist. Dazu genügt es, die Überlappungen zweier Regeln zu betrachten. Die einzige Möglichkeit einer Überlappung kann hierbei in einem Wort der Form $awa\bar{a}b$ mit $a, b \in A$ und $w \in A^*$ auftreten. Unter Anwendung der Regel $a\bar{a}b \rightarrow \bar{a}ab$ ergibt sich dann $aw\bar{a}ab$. Mit Regel $awa\bar{a} \rightarrow aw\bar{a}a$ ergibt sich jedoch dasselbe Wort. Also ist \mathcal{R}_ℓ lokal konfluent und somit konfluent. ■

Betrachte nun den durch das Semi-Thue-System \mathcal{R}_ℓ induzierten Ableitungsgraphen $\mathcal{G} = (\Sigma^*, \rightarrow_{\mathcal{R}_\ell})$. Dieser ist im Sinne von [KN95] automatisch, da die Regelmengende von einem Zwei-Band-Automaten über dem Alphabet Σ akzeptiert werden kann. Also ist für jeden Knoten $v \in \Sigma^*$ die Sprache aller Nachbarknoten effektiv regulär. Da \mathcal{G} nach Lemma 4.1 keine unendlichen Wege besitzt und weil für jeden Knoten $u \in \Sigma^*$ alle von u ausgehenden maximalen Wege im selben Knoten v mit $u \rightarrow_{\mathcal{R}_\ell}^* v$ enden, kann dann dieser Knoten v aus u und \mathcal{G} in endlich vielen Schritten durch iteriertes Berechnen von Nachbarknoten berechnet werden. Im Folgenden wird der Knoten v mit $\mathbf{nf}_\ell(u)$ bezeichnet. Daraus ergibt sich dann die Menge

$$\mathbf{NF}_\ell^{(n)} := \{\mathbf{nf}_\ell(u) \mid u \in \Sigma^*\} \subseteq \Sigma^*$$

aller Normalformen über $\mathcal{Q}_\ell^{(n)}$.

Beispiel. Aus obigem Beispiel folgt: $\mathbf{nf}_\ell(\overline{babbaa}) = \overline{babaab}$.

Die Menge $\mathbf{NF}_\ell^{(n)}$ soll nun einmal genauer untersucht werden. Dazu wird erst die Definition einer Variation des Shuffles $\langle u, \bar{u} \rangle$ eines Wortes $u \in A^*$ benötigt:

Definition 4.2. Seien $k \in \mathbb{N}$, $w \in A^*$, $a_1, \dots, a_k \in A$ und $w_i \in (A \setminus \{a_i\})^*$ für $1 \leq i \leq k$. Dann definiere:

$$\langle \mathbf{w}_1 \mathbf{a}_1 \mathbf{w}_2 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{w}_k \mathbf{a}_k \mathbf{w}, \overline{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_k} \rangle := w_1 a_1 \bar{a}_1 w_2 a_2 \bar{a}_2 \dots w_k a_k \bar{a}_k w.$$

Beachte, dass hierbei $a_1 \dots a_k \preceq w_1 a_1 \dots w_k a_k w$ gilt. Dieses Shuffle ist so definiert, dass wieder vor jeder Leseoperation die entsprechende Schreiboperation steht. Im Gegensatz zu $\langle u, \bar{u} \rangle$ können aber direkt vor den Teilfolgen $a\bar{a}$ weitere Symbole geschrieben werden, die verschieden von a sind. Dies ist also im Einklang mit der Definition des Lesens in \circ definiert, d.h. insbesondere gilt:

$$\varepsilon \circ \langle \mathbf{w}_1 \mathbf{a}_1 \mathbf{w}_2 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{w}_k \mathbf{a}_k \mathbf{w}, \overline{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_k} \rangle = w.$$

Mit diesem Shuffle lässt sich die Normalform eines Wortes sehr leicht angeben, wie das folgende Lemma zeigt:

Lemma 4.3. *Sei $u \in \Sigma^*$. Dann gilt $u \in \text{NF}_\ell^{(n)}$ genau dann, wenn es Wörter $u_1, u_2, u_3 \in A^*$ mit $u_3 \preceq u_2$ und $u = \bar{u}_1 \langle\langle u_2, \bar{u}_3 \rangle\rangle$ gibt.*

Beweisskizze. “ \Leftarrow ”: Es ist leicht ersichtlich, dass ein Wort in der Form $u = \bar{u}_1 \langle\langle u_2, \bar{u}_3 \rangle\rangle$ bzgl. der Regeln des Semi-Thue-Systems \mathcal{R}_ℓ irreduzibel ist. Es gilt also $u \in \text{NF}_\ell^{(n)}$.

“ \Rightarrow ”: Es soll die Kontraposition gezeigt werden. Habe u also nicht die Form $\bar{u}_1 \langle\langle u_2, \bar{u}_3 \rangle\rangle$. Dann tritt mindestens einer der folgenden Fälle ein:

- (Fall 1) Es gibt $a, b \in A$ mit $a \neq b$ und $u \in \Sigma^* a \bar{b} \Sigma^*$. Dann kann die Regel $a \bar{b} \rightarrow \bar{b} a$ angewendet werden.
- (Fall 2) Es gibt $a, b \in A$ mit $u \in \Sigma^* a \bar{a} b \Sigma^*$. Dann kann die Regel $a \bar{a} b \rightarrow \bar{a} a b$ angewendet werden.
- (Fall 3) Es gibt $a \in A$ und $w \in A^*$ mit $u \in \Sigma^* a w a \bar{a} \Sigma^*$. Dann kann die Regel $a w a \bar{a} \rightarrow a w \bar{a} a$ angewendet werden.

In allen Fällen ist u nicht irreduzibel, d.h. $u \notin \text{NF}_\ell^{(n)}$. ■

Seien nun $u, u_1, u_2, u_3 \in \Sigma^*$ mit $u_3 \preceq u_2$ und $\text{nf}_\ell(u) = \bar{u}_1 \langle\langle u_2, \bar{u}_3 \rangle\rangle$. Dann definiere das Anfangsstück und den Shuffleteil von u (wie in $\text{NF}_r^{(n)}$) als:

$$\lambda(\mathbf{u}) := u_1 \quad \text{und} \quad \mu(\mathbf{u}) := u_3.$$

4.2 Eindeutigkeit der Normalform

Nachdem nun die Normalform auf Σ^* definiert wurde, soll in diesem Abschnitt gezeigt werden, dass alle Wörter aus einer Äquivalenzklasse $[u]_{\equiv_\ell} \in \mathcal{Q}_\ell^{(n)}$ dieselbe Normalform besitzen. Dafür hilft das folgende relativ einfache Lemma:

Lemma 4.4. *Seien $u, v \in \Sigma^*$. Dann gilt $\text{nf}_\ell(u) = \text{nf}_\ell(v)$ genau dann, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

- (i) $\pi(u) = \pi(v)$,
- (ii) $\bar{\pi}(u) = \bar{\pi}(v)$ und
- (iii) $\lambda(u) = \lambda(v)$.

Beweis. “ \Rightarrow “: Dies folgt unmittelbar aus der Definition der Normalform.

“ \Leftarrow “: Angenommen, es gelte $\text{nf}_\ell(u) \neq \text{nf}_\ell(v)$. Gelte also

$$\begin{aligned}\text{nf}_\ell(u) &= \overline{u_1} \langle w_1 a_1 \dots w_k a_k w_{k+1}, \overline{a_1 \dots a_k} \rangle, \\ \text{nf}_\ell(v) &= \overline{v_1} \langle x_1 b_1 \dots x_l b_l x_{l+1}, \overline{b_1 \dots b_l} \rangle,\end{aligned}$$

wobei $k, l \in \mathbb{N}$, $u_1, w_{k+1}, v_1, x_{l+1} \in A^*$, $a_i \in A$ und $w_i \in (A \setminus \{a_i\})^*$ für alle $1 \leq i \leq k$ sowie $b_i \in A$ und $x_i \in (A \setminus \{b_i\})^*$ für alle $1 \leq i \leq l$ gilt.

Wegen (ii) und (iii) muss $a_1 \dots a_k = b_1 \dots b_l$ gelten. Also gilt $k = l$ und $a_i = b_i$ für alle $1 \leq i \leq k$.

Da $\text{nf}_\ell(u) \neq \text{nf}_\ell(v)$ gilt, muss also ein $1 \leq i \leq k + 1$ existieren mit $w_i \neq x_i$. Sei nun $1 \leq i \leq k + 1$ minimal mit $w_i \neq x_i$, d.h.

$$\overline{u_1} \langle w_1 a_1 \dots w_{i-1} a_{i-1}, \overline{a_1 \dots a_{i-1}} \rangle = \overline{v_1} \langle x_1 b_1 \dots x_{i-1} b_{i-1}, \overline{b_1 \dots b_{i-1}} \rangle.$$

Es muss weiterhin $i \leq k$ gelten, da sonst

$$\pi(u) w_{k+1}^{-1} = w_1 a_1 \dots w_k a_k = x_1 a_1 \dots x_k a_k = \pi(v) x_{k+1}^{-1}$$

und somit dann $\pi(u) \neq \pi(v)$ gilt - im Widerspruch zu (i).

Da i minimal ist und weil (i) gilt, muss w_i ein echtes Präfix von x_i sein oder umgekehrt. Aus Symmetriegründen kann $w_i \in x_i A^+$ angenommen werden. Wegen (iii) muss aber dann $w_i \in x_i a_i A^*$ gelten - im Widerspruch zu $w_i \in (A \setminus \{a_i\})^*$.

Also gilt schließlich $\text{nf}_\ell(u) = \text{nf}_\ell(v)$. ■

Damit lässt sich jetzt schon die Eindeutigkeit der Normalform für alle Äquivalenzklassen in $\mathcal{Q}_\ell^{(n)}$ zeigen:

Korollar 4.5. *Seien $u, v \in \Sigma^*$. Dann gilt:*

$$u \equiv_\ell v \quad \Leftrightarrow \quad \text{nf}_\ell(u) = \text{nf}_\ell(v).$$

Beweis. “ \Leftarrow “: Seien $u, v \in \Sigma^*$ mit $\text{nf}_\ell(u) = \text{nf}_\ell(v)$. Dann gilt

$$u \equiv_\ell \text{nf}_\ell(u) = \text{nf}_\ell(v) \equiv_\ell v.$$

“ \Rightarrow “: Seien $u, v \in \Sigma^*$ mit $u \equiv_\ell v$ sowie

$$\begin{aligned}\text{nf}_\ell(u) &= \overline{u_1} \langle w_1 a_1 \dots w_k a_k w_{k+1}, \overline{a_1 \dots a_k} \rangle, \\ \text{nf}_\ell(v) &= \overline{v_1} \langle x_1 b_1 \dots x_l b_l x_{l+1}, \overline{b_1 \dots b_l} \rangle,\end{aligned}$$

wobei $k, l \in \mathbb{N}$, $u_1, w_{k+1}, v_1, x_{l+1} \in A^*$, $a_i \in A$ und $w_i \in (A \setminus \{a_i\})^*$ für alle $1 \leq i \leq k$ sowie $b_i \in A$ und $x_i \in (A \setminus \{b_i\})^*$ für alle $1 \leq i \leq l$ gilt.

Angenommen, es gelte $\overline{u_1} = \lambda(u) \neq \lambda(v) = \overline{v_1}$. Dann ist wegen Lemma 3.9(i) $\overline{u_1}$ echtes Präfix von $\overline{v_1}$ oder umgekehrt. Es kann angenommen werden, dass $\overline{u_1}$ ein echtes Präfix von $\overline{v_1}$ ist (der andere Fall ist symmetrisch). Dann gilt:

$$u_1 \circ \text{nf}_\ell(u) = \varepsilon \circ w_1 a_1 \overline{u_1} \dots w_k a_k \overline{u_1} w_{k+1} = w_{k+1} \neq \perp,$$

da vor jeder Leseoperation \bar{a}_i in $w_1 a_1 \bar{a}_1 \dots w_k a_k \bar{a}_k w_{k+1}$ (für $1 \leq i \leq k$) stets die zugehörige Schreiboperation a_i erfolgt. Wegen $\bar{u}_1 \neq \bar{v}_1$ und $|u_1| < |v_1|$ folgt dann $u_1 \circ \bar{v}_1 = \perp$ und damit

$$u_1 \circ \text{nf}_\ell(v) = (u_1 \circ \bar{v}_1) \circ x_1 b_1 \bar{b}_1 \dots x_l b_l \bar{b}_l x_{l+1} = \perp.$$

Dies ist ein Widerspruch zu $u_1 \circ \text{nf}_\ell(u) = u_1 \circ u = u_1 \circ v = u_1 \circ \text{nf}_\ell(v)$, da $u \equiv_\ell v$ gilt.

Damit gilt also $\lambda(u) = \lambda(v)$. Wegen Lemma 3.9 gilt weiterhin $\bar{\pi}(u) = \bar{\pi}(v)$ und $\pi(u) = \pi(v)$. Somit kann Lemma 4.4 angewendet werden und es folgt schließlich $\text{nf}_\ell(u) = \text{nf}_\ell(v)$. ■

Da die Normalform für Äquivalenzklassen bzgl. \equiv_ℓ eindeutig ist, kann die Abbildung $\text{nf}_\ell: \Sigma^* \rightarrow \text{NF}_\ell^{(n)}$ zu $\text{nf}_\ell: \mathcal{Q}_\ell^{(n)} \rightarrow \text{NF}_\ell^{(n)}: [u]_{\equiv_\ell} \mapsto \text{nf}_\ell(u)$ geliftet werden. Aus der Eindeutigkeit folgt unmittelbar die folgende Aussage, welche besagt, dass nf_ℓ eine Bijektion ist, was letztendlich für die Isomorphie zwischen $\mathcal{Q}_\ell^{(n)}$ und $\text{NF}_\ell^{(n)}$ notwendig ist:

Satz 4.6. *Sei $\phi: \Sigma^* \rightarrow \mathcal{Q}_\ell^{(n)}: u \mapsto [u]_{\equiv_\ell}$ der natürliche Homomorphismus von Σ^* in $\mathcal{Q}_\ell^{(n)}$. Dann ist die Einschränkung $\phi|_{\text{NF}_\ell^{(n)}}$ von ϕ auf $\text{NF}_\ell^{(n)}$ bijektiv. Weiterhin gilt*

$$\left(\phi|_{\text{NF}_\ell^{(n)}} \right)^{-1} = \text{nf}_\ell.$$

Weiterhin lässt sich aus Lemma 4.4 und Korollar 4.5 folgern, dass sich die Äquivalenzklassen aus $\mathcal{Q}_\ell^{(n)}$ auch durch einen Vektor von drei Wörtern charakterisieren lassen:

Korollar 4.7. *Jede Klasse $[u]_{\equiv_\ell} \in \mathcal{Q}_\ell^{(n)}$ ist eindeutig beschrieben durch $\pi(u)$ und zwei Elementen aus $\{\bar{\pi}(u), \lambda(u), \mu(u)\}$.*

Zudem kann mit dem folgenden Korollar auch eine Aussage zum Zusammenhang zwischen den Normalformen in $\mathcal{Q}_r^{(n)}$ und $\mathcal{Q}_\ell^{(n)}$ getroffen werden.

Korollar 4.8. *Seien $u, v \in \Sigma^*$ mit $u \equiv_\ell v$. Dann gilt auch $u \equiv_r v$, d.h. $\mathcal{Q}_r^{(n)}$ ist isomorph zu einem Quotienten von $\mathcal{Q}_\ell^{(n)}$.*

Beweis. Betrachte zunächst das Semi-Thue-System \mathcal{R}_r mit den folgenden Regeln:

- $a\bar{b} \rightarrow \bar{b}a$ für $a \neq b, a, b \in A$,

- $a\bar{a}\bar{b} \rightarrow \bar{a}a\bar{b}$ für $a, b \in A$ und
- $ba\bar{a} \rightarrow \bar{b}a\bar{a}$ für $a, b \in A$.

Nach [HKZ14, Lemma 4.1] ist \mathcal{R}_r konfluent und terminierend und für $u, v \in \Sigma^*$ gilt $u \equiv_r v$ genau dann, wenn $\text{nf}_r(u) = \text{nf}_r(v)$, wobei nf_r analog zu nf_ℓ die Normalform bzgl. \mathcal{R}_r ist [HKZ14, Lemma 4.2].

Das Semi-Thue-System \mathcal{R}_ℓ unterscheidet sich lediglich in den Regeln der Form $awa\bar{a} \rightarrow aw\bar{a}a$ mit $a \in A$ und $w \in A^*$ von \mathcal{R}_r . Dieser Regeltyp kann jedoch durch Anwendung der Regel $ba\bar{a} \rightarrow \bar{b}a\bar{a}$ mit $b \in A$ und $aw \in A^*b$ in \mathcal{R}_r ersetzt werden. Es gilt somit für alle $u, v \in \Sigma^*$ mit $u \xrightarrow{\mathcal{R}_\ell}^* v$ auch $u \xrightarrow{\mathcal{R}_r}^* v$.

Seien nun $u, v \in \Sigma^*$ mit $u \equiv_\ell v$. Dann gilt wegen Korollar 4.5 $\text{nf}_\ell(u) = \text{nf}_\ell(v)$ und damit

$$u \xrightarrow{\mathcal{R}_r}^* \text{nf}_\ell(u) \xrightarrow{\mathcal{R}_r}^* \text{nf}_r(u) \quad \text{ sowie } \quad v \xrightarrow{\mathcal{R}_r}^* \text{nf}_\ell(u) \xrightarrow{\mathcal{R}_r}^* \text{nf}_r(v).$$

Da \mathcal{R}_r konfluent ist, muss also $\text{nf}_r(u) = \text{nf}_r(v)$ und damit auch $u \equiv_r v$ gelten. ■

Das Semi-Thue-System \mathcal{R}_r ist endlich, \mathcal{R}_ℓ dagegen nicht. Trotz der Ähnlichkeit der Regeln beider Systeme genügt es nicht, für \mathcal{R}_ℓ nur eine Einschränkung von \mathcal{R}_r zu verwenden. Verwendet man beispielsweise anstatt der Regeln $awa\bar{a} \rightarrow aw\bar{a}a$ die Regeln $aa\bar{a} \rightarrow a\bar{a}a$, so ist die entstehende Normalform nicht für alle Äquivalenzklassen in $\mathcal{Q}_\ell^{(n)}$ eindeutig. Beispielsweise gilt $aba\bar{a} \equiv_\ell a\bar{a}ba$. Beide Wörter wären dann jedoch irreduzibel. Es ist aber genauso unmöglich, für $awa\bar{a} \rightarrow aw\bar{a}a$ die Regeln $ba\bar{a} \rightarrow \bar{b}a\bar{a}$ mit $b \in A$ und $aw \in A^*b$ zu verwenden, da $ba\bar{a} \not\equiv_\ell \bar{b}a\bar{a}$ für $a \neq b$ gilt, beide Wörter aber dieselbe Normalform besitzen würden. Insbesondere gilt damit die Umkehrung von Korollar 4.8 im Allgemeinen nicht. So gilt für $n > 1$ also $\mathcal{Q}_\ell^{(n)} \neq \mathcal{Q}_r^{(n)}$. In Kapitel VII wird die Beziehung zwischen diesen beiden Monoiden erneut betrachtet und gezeigt, dass sich (trotz ihrer Ähnlichkeit nach Korollar 4.8) weder $\mathcal{Q}_\ell^{(n)}$ in $\mathcal{Q}_r^{(n)}$ einbetten lässt, noch umgekehrt.

4.3 Operation auf den Normalformen

Bis jetzt wurde nur die Grundmenge der Normalformen betrachtet. Da später in dieser Arbeit $\text{NF}_\ell^{(n)}$ jedoch als Monoid aufgefasst werden soll, ist noch die Definition einer Operation \cdot auf dieser Menge der Normalformen notwendig. Diese wird wie folgt definiert:

$$\cdot : \text{NF}_\ell^{(n)} \times \text{NF}_\ell^{(n)} \rightarrow \text{NF}_\ell^{(n)} \quad \text{ mit } \quad u \cdot v := \text{nf}_\ell(uv)$$

für alle $u, v \in \text{NF}_\ell^{(n)}$. Es handelt sich hierbei also um die Normalform der Konkatenation zweier Wörter (in Normalform). Diese Operation ist assoziativ, da für alle $u, v, w \in \text{NF}_\ell^{(n)}$ gilt:

$$\begin{aligned} u \cdot (v \cdot w) &= \text{nf}_\ell(u \text{nf}_\ell(vw)) \\ &\equiv_\ell \text{nf}_\ell(uvw) && \text{(da } vw \equiv_\ell \text{nf}_\ell(vw) \text{ gilt)} \\ &\equiv_\ell \text{nf}_\ell(\text{nf}_\ell(uv)w) && \text{(da } uv \equiv_\ell \text{nf}_\ell(uv) \text{ gilt)} \\ &= (u \cdot v) \cdot w. \end{aligned}$$

Nach Korollar 4.5 folgt dann aus der Äquivalenz von $u \cdot (v \cdot w)$ und $(u \cdot v) \cdot w$ auch die Gleichheit. Weiterhin ist $\varepsilon \in \mathbf{NF}_\ell^{(n)}$ neutrales Element. Also ist $(\mathbf{NF}_\ell^{(n)}, \cdot)$ ein Monoid. Aus Satz 4.6 folgt dann:

Korollar 4.9. *Das Transformationsmonoid $\mathcal{Q}_\ell^{(n)}$ ist isomorph zum Monoid der Normalformen $\mathbf{NF}_\ell^{(n)}$ mit Isomorphismus \mathbf{nf}_ℓ .*

Beweis. Seien $[u]_{\equiv_\ell}, [v]_{\equiv_\ell} \in \mathcal{Q}_\ell^{(n)}$ beliebig. Dann gilt:

$$\mathbf{nf}_\ell([u]_{\equiv_\ell} [v]_{\equiv_\ell}) = \mathbf{nf}_\ell([uv]_{\equiv_\ell}) = \mathbf{nf}_\ell(uv) = \mathbf{nf}_\ell(u) \mathbf{nf}_\ell(v) = \mathbf{nf}_\ell([u]_{\equiv_\ell}) \mathbf{nf}_\ell([v]_{\equiv_\ell}).$$

Also ist \mathbf{nf}_ℓ ein Homomorphismus. Nach Satz 4.6 ist \mathbf{nf}_ℓ zudem auch bijektiv, also ein Isomorphismus. ■

Damit können im Folgenden die beiden Monoide bei Betrachtungen der Einbettungen synonym verwendet werden. So werden für Einbettungen von bzw. in $\mathcal{Q}_\ell^{(n)}$ stets nur Normalformen anstelle von Äquivalenzklassen verwendet. Um weitere Rechnungen zu vereinfachen, soll dazu zunächst die oben definierte Operation genauer analysiert und eine genaue Beschreibung für die Normalform der Konkatination zweier Wörter angegeben werden. Wie in [HKZ14, Kapitel 5] ist dazu die Definition einer Überlappung zweier Wörter notwendig:

Definition 4.10. Seien $u, v \in A^*$. Dann definiere $\mathbf{ol}_\ell(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := v' \in A^*$ als das längste Suffix von v mit $v' \preceq u$.

Auf den ersten Blick scheint der Begriff “Überlappung” im Vergleich zu dessen Entsprechung in zuverlässigen Warteschlangen ungeeignet. Die Intuition ist jedoch vollkommen analog: Betrachte also die Normalform von $u\bar{v}$ mit $u, v \in A^*$. Die Leseoperationen \bar{v} schieben sich nach Definition von \mathcal{R}_ℓ so weit nach vorn, bis erstmals ein Wort in Normalform erreicht wird. Dies geschieht genau dann, wenn das längstmögliche Suffix von \bar{v} sich in ein Präfix von u “einbetten” lässt, d.h. wenn vor jeder Leseoperation \bar{a} dieses Suffixes die entsprechende Schreiboperation a sowie davor gegebenenfalls weitere von a verschiedene Schreiboperationen stehen. Grafisch lässt sich dies wie folgt veranschaulichen:

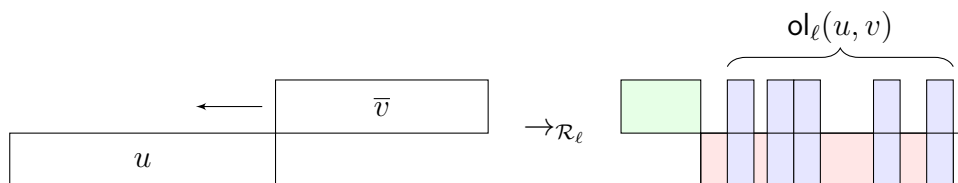


Abbildung 4.1. Veranschaulichung der Überlappung zweier Wörter (blau = Symbole der Überlappung, grün = Präfix der Leseoperationen, der nicht in die Überlappung passt, rot = weitere Schreiboperationen vor $a\bar{a}$, welche verschieden von a sind)

Vollkommen analog ist dies schließlich auch für beliebige Wörter $u, v \in \Sigma^*$. Dieser Zusammenhang soll nun mit den folgenden Lemmata bewiesen werden. Zunächst wird dazu ein erster Spezialfall betrachtet, in welchem eine einzelne Leseoperation an ein Wort in Normalform angehängt wird. Hierbei ist also die Anzahl der Leseoperationen, die vom Shuffleteil μ in das Anfangsstück λ übergehen, minimal, wobei die restliche Folge der Leseoperationen Teilwort der Schreiboperationen ist.

Lemma 4.11. *Seien $u, v \in A^*$ mit $v \preceq u$, $a \in A$ und $s = \text{ol}_\ell(u, va)$. Dann gilt:*

$$\text{nf}_\ell(\langle\langle u, \bar{v} \rangle\rangle \bar{a}) = \overline{vas^{-1}} \langle\langle u, \bar{s} \rangle\rangle.$$

Beweis. Seien $u, v \in A^*$, $m \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_{m+1} \in A$ und $w_1, \dots, w_{m+1} \in A^*$ mit $u = w_1 a_1 \dots w_m a_m w_{m+1}$ und $v = a_1 \dots a_m$, wobei $w_i \in (A \setminus \{a_i\})^*$ für alle $1 \leq i \leq m$ gilt. Per Induktion nach m soll nun gezeigt werden, dass es ein $0 \leq i \leq m+1$ mit den folgenden Eigenschaften gibt:

- (i) $\langle\langle u, \overline{a_1 \dots a_m} \rangle\rangle \overline{a_{m+1}} \equiv_\ell \overline{a_1 \dots a_i} \langle\langle u, \overline{a_{i+1} \dots a_{m+1}} \rangle\rangle$,
- (ii) $a_{i+1} \dots a_{m+1} \preceq u$ und
- (iii) falls $i \geq 1$, so gilt $a_i \dots a_{m+1} \not\preceq u$.

Daraus ergibt sich schließlich unmittelbar die Behauptung: Da das Wort $\overline{a_1 \dots a_i} \langle\langle u, \overline{a_{i+1} \dots a_{m+1}} \rangle\rangle \in \mathbf{NF}_\ell^{(n)}$ ist, muss wegen (i) auch

$$\text{nf}_\ell(\langle\langle u, \overline{a_1 \dots a_m} \rangle\rangle \overline{a_{m+1}}) = \overline{a_1 \dots a_i} \langle\langle u, \overline{a_{i+1} \dots a_{m+1}} \rangle\rangle$$

gelten. Aus (ii) und (iii) folgt zudem die Maximalität von $a_{i+1} \dots a_{m+1}$, d.h. es gilt $\text{ol}_\ell(u, va_{m+1}) = a_{i+1} \dots a_{m+1}$.

Sei also $m = 0$. Dann betrachte die folgende Fallunterscheidung:

- (Fall 1) Es gilt $a_1 \preceq w_1$. Setze $i = 0$ (damit sind (ii) und (iii) trivialerweise erfüllt). Weiterhin gibt es $x \in (A \setminus \{a_1\})^*$ und $y \in A^*$ mit $w_1 = xa_1y$. Dann gilt also

$$\langle\langle w_1, \bar{\varepsilon} \rangle\rangle \bar{a}_1 = w_1 \bar{a}_1 = xa_1y \bar{a}_1 \equiv_\ell xa_1 \bar{a}_1 y = \langle\langle w_1, \bar{a}_1 \rangle\rangle,$$

womit auch (i) erfüllt ist.

- (Fall 2) Es gilt $a_1 \not\preceq w_1$. Setze $i = 1$ (damit sind (ii) und (iii) trivialerweise erfüllt). Es gilt also $w_1 \in (A \setminus \{a_1\})^*$ und damit

$$\langle\langle w_1, \bar{\varepsilon} \rangle\rangle \bar{a}_1 = w_1 \bar{a}_1 \equiv_\ell \bar{a}_1 w_1 = \bar{a}_1 \langle\langle w_1, \bar{\varepsilon} \rangle\rangle,$$

womit auch (i) erfüllt ist.

Sei nun $m \geq 1$. Betrachte nun wieder die folgende Fallunterscheidung:

(Fall 1) Es gilt $a_{m+1} \preceq w_{m+1}$. Setze $i = 0$, womit (iii) trivialerweise erfüllt ist. Weiterhin gilt $a_1 \dots a_m \preceq w_1 a_1 \dots w_m a_m$ und damit $a_1 \dots a_{m+1} \preceq u$, womit auch (ii) gilt. Zudem gibt es Wörter $x \in (A \setminus \{a_{m+1}\})^*$ und $y \in A^*$ mit $w_{m+1} = x a_{m+1} y$. Es gilt damit

$$\begin{aligned} \langle\langle u, \overline{a_1 \dots a_m} \rangle\rangle \overline{a_{m+1}} &= \langle\langle w_1 a_1 \dots w_m a_m, \overline{a_1 \dots a_m} \rangle\rangle w_{m+1} \overline{a_{m+1}} \\ &= \langle\langle w_1 a_1 \dots w_m a_m, \overline{a_1 \dots a_m} \rangle\rangle x a_{m+1} y \overline{a_{m+1}} \\ &\equiv_{\ell} \langle\langle w_1 a_1 \dots w_m a_m, \overline{a_1 \dots a_m} \rangle\rangle x a_{m+1} \overline{a_{m+1}} y \\ &= \langle\langle u, \overline{a_1 \dots a_{m+1}} \rangle\rangle, \end{aligned}$$

womit auch (i) erfüllt ist.

(Fall 2) Es gilt $a_{m+1} \not\preceq w_{m+1}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} &\langle\langle u, \overline{a_1 \dots a_m} \rangle\rangle \overline{a_{m+1}} \\ &= \langle\langle w_1 a_1 \dots w_{m-1} a_{m-1}, \overline{a_1 \dots a_{m-1}} \rangle\rangle w_m a_m \overline{a_m} w_{m+1} \overline{a_{m+1}} \\ &\equiv_{\ell} \langle\langle w_1 a_1 \dots w_{m-1} a_{m-1}, \overline{a_1 \dots a_{m-1}} \rangle\rangle w_m a_m \overline{a_m a_{m+1}} w_{m+1} \\ &\equiv_{\ell} \langle\langle w_1 a_1 \dots w_{m-1} a_{m-1}, \overline{a_1 \dots a_{m-1}} \rangle\rangle w_m \overline{a_m a_m a_{m+1}} w_{m+1} \\ &\equiv_{\ell} \langle\langle w_1 a_1 \dots w_{m-1} a_{m-1}, \overline{a_1 \dots a_{m-1}} \rangle\rangle \overline{a_m} w_m a_m \overline{a_{m+1}} w_{m+1} \\ &\equiv_{\ell} \overline{a_1 \dots a_i} \langle\langle w_1 a_1 \dots w_{m-1} a_{m-1}, \overline{a_{i+1} \dots a_m} \rangle\rangle w_m a_m \overline{a_{m+1}} w_{m+1}, \end{aligned}$$

wobei $0 \leq i \leq m$ nach Induktionsvoraussetzung (i)-(iii) erfüllt. Zudem muss $i \geq 1$ gelten, da $a_1 \dots a_m \not\preceq w_1 a_1 \dots w_{m-1} a_{m-1}$ und (ii) gilt.

(2.1) Es gilt $a_{m+1} \preceq w_m a_m$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $a_{i+1} \dots a_m \preceq w_1 a_1 \dots w_{m-1} a_{m-1}$ und somit $a_{i+1} \dots a_{m+1} \preceq u$, womit (ii) erfüllt ist. Weiterhin gibt es $x \in (A \setminus \{a_{m+1}\})^*$ und $y \in A^*$ mit $w_m a_m = x a_{m+1} y$. Somit gilt:

$$\begin{aligned} &\overline{a_1 \dots a_i} \langle\langle w_1 a_1 \dots w_{m-1} a_{m-1}, \overline{a_{i+1} \dots a_m} \rangle\rangle w_m a_m \overline{a_{m+1}} w_{m+1} \\ &= \overline{a_1 \dots a_i} \langle\langle w_1 a_1 \dots w_{m-1} a_{m-1}, \overline{a_{i+1} \dots a_m} \rangle\rangle x a_{m+1} y \overline{a_{m+1}} w_{m+1} \\ &\equiv_{\ell} \overline{a_1 \dots a_i} \langle\langle w_1 a_1 \dots w_{m-1} a_{m-1}, \overline{a_{i+1} \dots a_m} \rangle\rangle x a_{m+1} \overline{a_{m+1}} y w_{m+1} \\ &= \overline{a_1 \dots a_i} \langle\langle w_1 a_1 \dots w_{m-1} a_{m-1}, \overline{a_{i+1} \dots a_m} \rangle\rangle w_m a_m \overline{a_{m+1}} w_{m+1}, \end{aligned}$$

womit auch (i) erfüllt ist. Nach Induktionsvoraussetzung gilt weiterhin $a_i \dots a_m \not\preceq w_1 a_1 \dots w_{m-1} a_{m-1}$. Wegen $a_m \not\preceq w_m$ und $a_{m+1} \not\preceq w_{m+1}$ gilt dann auch $a_i \dots a_{m+1} \not\preceq w_1 a_1 \dots w_m a_m w_{m+1}$, womit auch (iii) erfüllt ist.

(2.2) Es gilt $a_{m+1} \not\preceq w_m a_m$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} &\overline{a_1 \dots a_i} \langle\langle w_1 a_1 \dots w_{m-1} a_{m-1}, \overline{a_{i+1} \dots a_m} \rangle\rangle w_m a_m \overline{a_{m+1}} w_{m+1} \\ &\equiv_{\ell} \overline{a_1 \dots a_i} \langle\langle w_1 a_1 \dots w_{m-1} a_{m-1}, \overline{a_{i+1} \dots a_m} \rangle\rangle \overline{a_{m+1}} w_m a_m w_{m+1} \\ &\equiv_{\ell} \overline{a_1 \dots a_i a_{i+1} \dots a_j} \langle\langle w_1 a_1 \dots w_{m-1} a_{m-1}, \overline{a_{i+1} \dots a_{m+1}} \rangle\rangle w_m a_m w_{m+1} \\ &= \overline{a_1 \dots a_j} \langle\langle u, \overline{a_{j+1} \dots a_{m+1}} \rangle\rangle, \end{aligned}$$

wobei $i \leq j \leq m$ nach Induktionsvoraussetzung (i)-(iii) erfüllt. Damit ist bereits (i) erfüllt. Weiterhin gilt

$$a_{j+1} \dots a_{m+1} \preceq w_1 a_1 \dots w_{m-1} a_{m-1}$$

und somit auch $a_{j+1} \dots a_{m+1} \preceq u$, womit auch (ii) erfüllt ist. Zudem folgt aus $a_j \dots a_{m+1} \not\preceq w_1 a_1 \dots w_{m-1} a_{m-1}$ und $a_{m+1} \not\preceq w_m a_m w_{m+1}$ schließlich auch $a_j \dots a_{m+1} \not\preceq u$, also (iii). \blacksquare

Die Aussage von Lemma 4.11 kann induktiv auch auf beliebig lange Folgen von Leseoperationen erweitert werden:

Korollar 4.12. *Seien $u, v, w \in A^*$ mit $v \preceq u$ und $s = \text{ol}_\ell(u, vw)$. Dann gilt:*

$$\text{nf}_\ell(\langle\langle u, \bar{v} \rangle\rangle \bar{w}) = \overline{vws^{-1}} \langle\langle u, \bar{s} \rangle\rangle.$$

Beweis. Per Induktion nach $|w|$.

Sei zunächst $|w| = 0$. Dann gilt:

$$\text{nf}_\ell(\langle\langle u, \bar{v} \rangle\rangle \bar{w}) = \text{nf}_\ell(\langle\langle u, \bar{v} \rangle\rangle) = \langle\langle u, \bar{v} \rangle\rangle$$

sowie $s = \text{ol}_\ell(u, vw) = \text{ol}_\ell(u, v) = v$, da $v \preceq u$ gilt. Also gilt auch

$$\overline{vws^{-1}} \langle\langle u, \bar{s} \rangle\rangle = \overline{vv^{-1}} \langle\langle u, \bar{v} \rangle\rangle = \langle\langle u, \bar{v} \rangle\rangle = \text{nf}_\ell(\langle\langle u, \bar{v} \rangle\rangle \bar{w}).$$

Sei nun $|w| \geq 1$. Dann gibt es also $a \in A$ und $w' \in A^*$ mit $w = w'a$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt dann

$$\text{nf}_\ell(\langle\langle u, \bar{v} \rangle\rangle \bar{w}') = \overline{vw's^{-1}} \langle\langle u, \bar{s} \rangle\rangle$$

mit $s = \text{ol}_\ell(u, vw')$. Weiterhin gilt (nach Definition der Normalform über das Semi-Thue-System)

$$\text{nf}_\ell(\langle\langle u, \bar{v} \rangle\rangle \bar{w}'a) \equiv_\ell \overline{vw's^{-1}} \langle\langle u, \bar{s} \rangle\rangle \bar{a}.$$

Es kann nun Lemma 4.11 angewandt werden. Es gilt also:

$$\text{nf}_\ell(\langle\langle u, \bar{s} \rangle\rangle \bar{a}) = \overline{sat^{-1}} \langle\langle u, \bar{t} \rangle\rangle$$

mit $t = \text{ol}_\ell(u, sa)$, d.h.

$$\overline{vw's^{-1}} \langle\langle u, \bar{s} \rangle\rangle \bar{a} = \overline{vw's^{-1}sat^{-1}} \langle\langle u, \bar{t} \rangle\rangle = \overline{vwt^{-1}} \langle\langle u, \bar{t} \rangle\rangle.$$

Es muss also nur noch $t = \text{ol}_\ell(u, vw)$ gezeigt werden. Gilt $s = vw'$, so gilt dies unmittelbar. Gelte also nun $s \neq vw'$. Dann gibt es ein $b \in A$ mit $vw' \in A^*bs$ und $bs \not\preceq u$. Insbesondere gilt dann aber $bsa \not\preceq u$. Also gilt $|\text{ol}_\ell(u, vw)| = |\text{ol}_\ell(u, sa)|$. Da sa Suffix von vw ist, gilt schließlich auch $\text{ol}_\ell(u, vw) = \text{ol}_\ell(u, sa) = t$ ■

Ein zweiter Spezialfall behandelt die Konkatenation zweier Shuffles. Hier wird gezeigt, dass sich diese genau zu einem neuen Shuffle vereinen, ohne dass eine einzige Leseoperation in das Anfangsstück λ übergeht.

Lemma 4.13. *Seien $u, v, w, x \in A^*$ mit $v \preceq u$ und $x \preceq w$. Dann gilt:*

$$\text{nf}_\ell(\langle\langle u, \bar{v} \rangle\rangle \langle\langle w, \bar{x} \rangle\rangle) = \langle\langle uw, \overline{v\bar{x}} \rangle\rangle.$$

Beweis. Seien $u, v, w, x \in A^*$ mit $v \preceq u$ und $x \preceq w$. Seien weiterhin $m \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_m \in A$ mit $x = a_1 \dots a_m$ sowie $w_1, \dots, w_{m+1} \in A^*$ mit $w_i \in (A \setminus \{a_i\})^*$ für alle $1 \leq i \leq m$ und $w = w_1 a_1 \dots w_m a_m w_{m+1}$.

Per Induktion über m soll nun $\langle\langle u, \bar{v} \rangle\rangle \langle\langle w, \bar{x} \rangle\rangle \equiv_\ell \langle\langle uw, \overline{v\bar{x}} \rangle\rangle$ gezeigt werden. Daraus folgt unmittelbar die Aussage, da $\langle\langle uw, \overline{v\bar{x}} \rangle\rangle \in \mathbf{NF}_\ell^{(n)}$ gilt.

Sei also $m = 0$. Dann gilt:

$$\langle\langle u, \bar{v} \rangle\rangle \langle\langle w, \bar{x} \rangle\rangle = \langle\langle u, \bar{v} \rangle\rangle w_1 = \langle\langle uw_1, \bar{x} \rangle\rangle,$$

da wegen $v \preceq u$ auch $v \preceq uw_1$ gilt.

Sei nun $m \geq 1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \langle\langle u, \bar{v} \rangle\rangle \langle\langle w, \bar{x} \rangle\rangle &= \langle\langle u, \bar{v} \rangle\rangle \langle\langle w_1 a_1 \dots w_{m-1} a_{m-1}, \overline{a_1 \dots a_{m-1}} \rangle\rangle w_m a_m \overline{a_m} w_{m+1} \\ &\equiv_\ell \langle\langle uw_1 a_1 \dots w_{m-1} a_{m-1}, \overline{v a_1 \dots a_{m-1}} \rangle\rangle w_m a_m \overline{a_m} w_{m+1} \end{aligned}$$

nach Induktionsvoraussetzung. Setze nun $y \in A^*$ als das längste Suffix von $uw_1 a_1 \dots w_{m-1} a_{m-1}$, sodass

$$v a_1 \dots a_{m-1} \preceq uw_1 a_1 \dots w_{m-1} a_{m-1} y^{-1}$$

gilt. Dann gilt also $a_m \preceq y w_m a_m$ und somit existieren $z_1 \in (A \setminus \{a_m\})^*$ und $z_2 \in A^*$ mit $a_m \preceq y w_m a_m = z_1 a_m z_2$. Es gilt damit:

$$\begin{aligned} &\langle\langle uw_1 a_1 \dots w_{m-1} a_{m-1}, \overline{v a_1 \dots a_{m-1}} \rangle\rangle w_m a_m \overline{a_m} w_{m+1} \\ &= \langle\langle uw_1 a_1 \dots w_{m-1} a_{m-1} y^{-1}, \overline{v a_1 \dots a_{m-1}} \rangle\rangle y w_m a_m \overline{a_m} w_{m+1} \\ &\equiv_\ell \langle\langle uw_1 a_1 \dots w_{m-1} a_{m-1} y^{-1}, \overline{v a_1 \dots a_{m-1}} \rangle\rangle z_1 a_m \overline{a_m} z_2 w_{m+1} \\ &= \langle\langle uw_1 a_1 \dots w_{m-1} a_{m-1} y^{-1} y w_m a_m w_{m+1}, \overline{v a_1 \dots a_{m-1} a_m} \rangle\rangle = \langle\langle uw, \overline{v\bar{x}} \rangle\rangle. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Aus Korollar 4.12 und Lemma 4.13 lässt sich schließlich unmittelbar der allgemeine Fall der Konkatenation zweier Wörter folgern:

Satz 4.14. Seien $u, v \in \Sigma^*$ und $s := \text{ol}_\ell(\pi(u), \mu(u)\lambda(v))$. Dann gilt:

$$\text{nf}_\ell(uv) = \overline{\pi(u)\lambda(v)s^{-1}} \langle\langle \pi(uv), \overline{s\mu(v)} \rangle\rangle.$$

Beweis. Nach Lemma 4.3 gibt es Wörter $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3 \in A^*$ mit $u_3 \preceq u_2$, $v_3 \preceq v_2$, $\text{nf}_\ell(u) = \overline{u_1} \langle\langle u_2, \overline{u_3} \rangle\rangle$ und $\text{nf}_\ell(v) = \overline{v_1} \langle\langle v_2, \overline{v_3} \rangle\rangle$. Mit

$$s = \text{ol}_\ell(\pi(u), \mu(u)\lambda(v)) = \text{ol}_\ell(u_2, u_3 v_1)$$

gilt dann:

$$\begin{aligned} \text{nf}_\ell(uv) &= \text{nf}_\ell(\overline{u_1} \langle\langle u_2, \overline{u_3} \rangle\rangle \overline{v_1} \langle\langle v_2, \overline{v_3} \rangle\rangle) && (\equiv_\ell \text{ Kongruenz \& Korollar 4.5}) \\ &= \text{nf}_\ell(\overline{u_1 u_3 v_1 s^{-1}} \langle\langle u_2, \overline{s} \rangle\rangle \langle\langle v_2, \overline{v_3} \rangle\rangle) && (\text{Korollar 4.12}) \\ &= \text{nf}_\ell(\overline{u_1 u_3 v_1 s^{-1}} \langle\langle u_2 v_2, \overline{s v_3} \rangle\rangle) && (\text{Lemma 4.13}) \\ &= \overline{u_1 u_3 v_1 s^{-1}} \langle\langle u_2 v_2, \overline{s v_3} \rangle\rangle \\ &= \overline{\pi(u)\lambda(v)s^{-1}} \langle\langle \pi(uv), \overline{s\mu(v)} \rangle\rangle. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Die Normalform der Konkatenation uv zweier Wörter u und v sieht also ähnlich aus wie in zuverlässigen Warteschlangen. So besteht der Shuffleteil $\mu(uv)$ von uv wieder aus Teilen des Shuffleteils $\mu(u)$ von u und sämtlichen Leseoperationen $\bar{\pi}(v)$ von v und besitzt dabei maximale Länge, wobei dieser ein Teilwort der Schreiboperationen $\pi(uv)$ von uv ist. Allerdings kann hierbei der Shuffleteil $\mu(v)$ von v nie bis in das Anfangsstück $\lambda(uv)$ von uv geschoben werden, sondern verbleibt stets vollständig im Shuffleteil $\mu(uv)$ von uv .

Aus Korollar 4.12 und Lemma 4.13 können weiterhin noch Aussagen zur Kürzbarkeit von \equiv_ℓ gefolgert werden. So ist das Transformationsmonoid $\mathcal{Q}_\ell^{(n)}$ bzgl. Leseoperationen *links-kürzbar* und bzgl. Shuffles *rechts-kürzbar*.

Korollar 4.15. *Seien $u, v \in \Sigma^*$ und $w_1, w_2 \in A^*$ mit $w_2 \preceq w_1$. Dann gilt:*

- (i) $u \equiv_\ell v \Leftrightarrow \bar{w}_1 u \equiv_\ell \bar{w}_1 v$.
- (ii) $u \equiv_\ell v \Leftrightarrow u \langle\langle w_1, \bar{w}_2 \rangle\rangle \equiv_\ell v \langle\langle w_1, \bar{w}_2 \rangle\rangle$.

Beweis. Die Implikationen “ \Rightarrow ” beider Aussagen folgen unmittelbar daraus, dass \equiv_ℓ eine Kongruenz bzgl. der Konkatenation zweier Wörter ist. Es muss also jeweils nur noch die umgekehrte Implikation gezeigt werden.

Seien $\text{nf}_\ell(u) = \bar{u}_1 \langle\langle u_2, \bar{u}_3 \rangle\rangle$ und $\text{nf}_\ell(v) = \bar{v}_1 \langle\langle v_2, \bar{v}_3 \rangle\rangle$ mit $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3 \in A^*$, $u_3 \preceq u_2$ und $v_3 \preceq v_2$.

(i) Es gilt:

$$\bar{w}_1 u \equiv_\ell \bar{w}_1 \bar{u}_1 \langle\langle u_2, \bar{u}_3 \rangle\rangle \quad \text{und} \quad \bar{w}_1 v \equiv_\ell \bar{w}_1 \bar{v}_1 \langle\langle v_2, \bar{v}_3 \rangle\rangle.$$

Nach Voraussetzung und Korollar 4.5 gilt dann $w_1 u_1 = w_1 v_1$, $u_2 = v_2$ und $u_3 = v_3$. Also gilt $\text{nf}_\ell(u) = \text{nf}_\ell(v)$ und damit $u \equiv_\ell v$.

(ii) Es gilt:

$$\begin{aligned} u \langle\langle w_1, \bar{w}_2 \rangle\rangle &\equiv_\ell \bar{u}_1 \langle\langle u_2, \bar{u}_3 \rangle\rangle \langle\langle w_1, \bar{w}_2 \rangle\rangle \equiv_\ell \bar{u}_1 \langle\langle u_2 w_1, \bar{u}_3 \bar{w}_2 \rangle\rangle && \text{und} \\ v \langle\langle w_1, \bar{w}_2 \rangle\rangle &\equiv_\ell \bar{v}_1 \langle\langle v_2, \bar{v}_3 \rangle\rangle \langle\langle w_1, \bar{w}_2 \rangle\rangle \equiv_\ell \bar{v}_1 \langle\langle v_2 w_1, \bar{v}_3 \bar{w}_2 \rangle\rangle. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung und Korollar 4.5 gilt dann $u_1 = v_1$, $u_2 w_1 = v_2 w_1$ und $u_3 w_2 = v_3 w_2$. Also gilt $\text{nf}_\ell(u) = \text{nf}_\ell(v)$ und damit $u \equiv_\ell v$. ■

KAPITEL V

Ein Kriterium zur Nicht-Einbettung

In diesem Kapitel soll eine erste zentrale Aussage zur Einbettung von Monoiden in das Transformationsmonoid einer vergesslichen Warteschlange bewiesen werden. So wird gezeigt, dass zwei (unabhängig vom Kontext) verschiedene Elemente aus dem Urbild eines Homomorphismus ϕ Bilder mit voneinander verschiedenen Lese- oder Schreiboperationen besitzen müssen, wenn ϕ injektiv ist. Daraus kann schließlich ein Beweisschema gewonnen werden, welches anschließend angegeben und anhand eines Beispiels illustriert wird.

5.1 Vorbereitungen

Für den Beweis des Kriteriums sind einige vorbereitende Aussagen notwendig. In einem ersten Lemma wird dabei die Konkatenation zweier Überlappungen betrachtet.

Lemma 5.1. *Seien $u, v, w_1, w_2 \in A^*$ mit $\text{ol}_\ell(w_2, uv) = \text{ol}_\ell(w_2, v)$. Dann gilt:*

$$\text{ol}_\ell(w_1, uv \text{ol}_\ell(w_2, v)^{-1}) \text{ol}_\ell(w_2, v) = \text{ol}_\ell(w_1 w_2, uv).$$

Beweis. Zur Veranschaulichung des folgenden Beweises siehe auch Abbildung 5.1 auf Seite 30.

Sei $s := \text{ol}_\ell(w_2, v) = \text{ol}_\ell(w_2, uv)$ und $t := \text{ol}_\ell(w_1 w_2, uv)$. Offensichtlich folgt aus der Definition von ol_ℓ dann $t \in A^* s$. Ist $uv = s$, so ist die Aussage trivial. Gelte also nun $uv \neq s$. Dann gibt es ein $a \in A$ mit $uvs^{-1} \in A^* a$. Sei weiterhin $x \in A^*$ ein Suffix von w_2 mit minimaler Länge und $s \preceq x$. Dann muss wegen der Maximalität von s auch $w_2 x^{-1} \in (A \setminus \{a\})^*$ gelten (andernfalls wäre as ein Teilwort von w_2).

Die Überlappung von uvs^{-1} mit w_1 besitzt maximale Länge, ist Suffix von uvs^{-1} und ist Teilwort von w_1 . Weiterhin ist ts^{-1} das Wort maximaler Länge, das sich aus der Überlappung von uvs^{-1} mit $w_1 w_2 x^{-1}$ ergibt. Nach obiger Argumentation enthält $w_2 x^{-1}$ aber keine Schreiboperation a und ist Suffix von uvs^{-1} . Also gilt $\text{ol}_\ell(w_1, uvs^{-1}) = ts^{-1}$, woraus unmittelbar die gewünschte Aussage folgt.

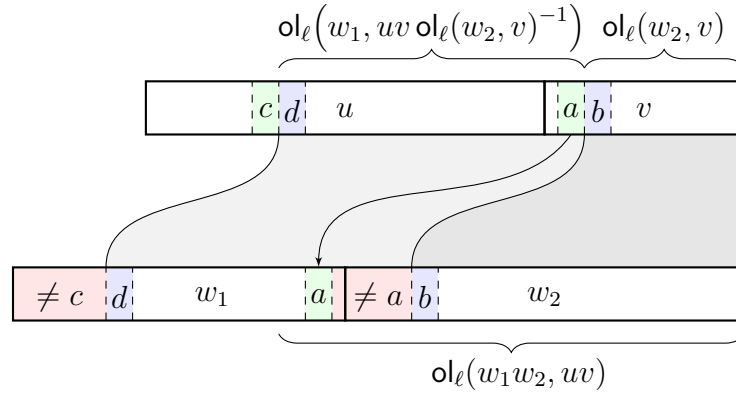


Abbildung 5.1. Die Beweisidee ■

Im Beweis des Kriteriums wird für ein Wort $u \in \Sigma^*$ eine rekursive Folge $(s_i)_{i \in \mathbb{N}_+}$ von Überlappungen zwischen u^{i-1} und u für alle $i \in \mathbb{N}_+$ definiert. Das folgende Lemma beweist, dass die Konkatination von s_i und $\mu(u)$ genau $\mu(u^i)$ ist. Mit anderen Worten: Die Folge ist korrekt definiert.

Lemma 5.2. *Seien $u \in \Sigma^*$ und $u_1, u_2, u_3 \in A^*$ mit $u_3 \preceq u_2$ und $\text{nf}_\ell(u) = \overline{u_1} \langle u_2, \overline{u_3} \rangle$. Sei weiterhin die Folge $(s_i)_{i \in \mathbb{N}_+}$ definiert durch*

$$s_1 := \varepsilon \quad \text{und} \quad s_{i+1} := \text{ol}_\ell(u_2^i, s_i u_3 u_1)$$

für alle $i \in \mathbb{N}_+$. Dann gilt für $i \in \mathbb{N}_+$:

$$\text{nf}_\ell(u^i) = \overline{(u_1 u_3)^{i-1} u_1 s_i^{-1}} \langle u_2^i, \overline{s_i u_3} \rangle.$$

Beweis. Induktion nach $i \in \mathbb{N}_+$. Sei $i = 1$. Dann gilt:

$$\overline{(u_1 u_3)^0 u_1 s_1^{-1}} \langle u_2, \overline{s_1 u_3} \rangle = \overline{u_1} \langle u_2, \overline{u_3} \rangle = \text{nf}_\ell(u).$$

Sei nun $i \geq 2$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt:

$$\text{nf}_\ell(u^{i-1}) = \overline{(u_1 u_3)^{i-2} u_1 s_{i-1}^{-1}} \langle u_2^{i-1}, \overline{s_{i-1} u_3} \rangle.$$

Dann gilt also mit $t := \text{ol}_\ell(u_2^{i-1}, s_{i-1} u_3 u_1)$ nach Satz 4.14:

$$\text{nf}_\ell(u^i) = \text{nf}_\ell(u^{i-1} u) = \text{nf}_\ell(\text{nf}_\ell(u^{i-1}) \text{nf}_\ell(u)) = \overline{(u_1 u_3)^{i-1} u_1 t^{-1}} \langle u_2^i, \overline{t u_3} \rangle.$$

Nach Definition der Folge $(s_i)_{i \in \mathbb{N}_+}$ gilt dann $t = s_i$. Somit folgt die gewünschte Aussage. ■

Im nächsten Lemma wird erneut eine Eigenschaft der Folge $(s_i)_{i \in \mathbb{N}_+}$ aus Lemma 5.2 betrachtet. Hierin wird ein Zusammenhang zwischen den Überlappungen s_i und den Anfangsstücken $\lambda(u^i)$ hergestellt.

Lemma 5.3. Seien $u \in \Sigma^*$ und $u_1, u_2, u_3 \in A^*$ mit $u_3 \preceq u_2$ und $\text{nf}_\ell(u) = \overline{u_1} \langle u_2, \overline{u_3} \rangle$. Sei weiterhin die Folge $(s_i)_{i \in \mathbb{N}_+}$ definiert durch

$$s_1 := \varepsilon \quad \text{und} \quad s_{i+1} := \text{ol}_\ell(u_2^i, s_i u_3 u_1)$$

für alle $i \in \mathbb{N}_+$. Dann gilt für $i \in \mathbb{N}_+$:

$$s_{i+1} = s_i u_3 u_1 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda(u^{i+1}) = \lambda(u^i).$$

Beweis. Für die Leseoperationen in u^{i+1} gilt einerseits

$$\overline{\pi}(u^{i+1}) = \lambda(u^{i+1}) \mu(u^{i+1}) = \lambda(u^{i+1}) s_{i+1} u_3.$$

Da $\overline{\pi}$ ein Homomorphismus ist, gilt andererseits

$$\overline{\pi}(u^{i+1}) = \overline{\pi}(u^i) \overline{\pi}(u) = \lambda(u^i) \mu(u^i) \overline{\pi}(u) = \lambda(u^i) s_i u_3 u_1 u_3$$

und somit also

$$\lambda(u^{i+1}) s_{i+1} u_3 = \lambda(u^i) s_i u_3 u_1 u_3,$$

woraus unmittelbar die gewünschte Aussage folgt. \blacksquare

Auch im letzten für den Beweis des Kriteriums notwendigen Lemma wird die Folge $(s_i)_{i \in \mathbb{N}_+}$ von oben (in etwas verallgemeinerter Form) betrachtet. Hierbei wird gezeigt, dass im Falle einer Überlappung s_{i_0} (mit $i_0 \in \mathbb{N}_+$), welche echt kürzer ist als die zur Verfügung stehenden Leseoperationen, die Voraussetzung von Lemma 5.1 sowohl für s_{i_0} als auch für s_{i_0+1} erfüllt ist. Somit kann also Lemma 5.1 für beide Überlappungen angewandt werden.

Lemma 5.4. Seien $u, v \in A^+$ sowie $(s_i)_{i \in \mathbb{N}_+}$ die Folge mit

$$s_1 := \varepsilon, \quad s_{i+1} := \text{ol}_\ell(u^i, s_i v)$$

für alle $i \in \mathbb{N}_+$. Sei weiterhin $i \geq 2$ mit $s_i \neq s_{i-1} v$. Dann gilt

$$s_{i+1} = \text{ol}_\ell(u^i, v^i).$$

Beweis. Wie im Beweis von Lemma 5.1 befindet sich unterhalb dieses Beweises mit Abbildung 5.2 eine Illustration dieses Beweises.

Angenommen, es gäbe ein $i \geq 2$ mit $s_i \neq s_{i-1} v$ und $s_{i+1} \neq \text{ol}_\ell(u^i, v^i)$. Nach Definition der Folge und ol_ℓ muss dann also s_{i+1} ein echtes Präfix von $\text{ol}_\ell(u^i, v^i)$ sein. Es muss aber gleichzeitig auch $s_{i+1} = s_i v$ gelten. Wegen $s_i \neq s_{i-1} v$ muss $v \not\preceq u$ sein, denn andernfalls wäre wegen $s_{i-1} \preceq u^{i-2}$ auch $s_{i-1} v \preceq u^{i-1}$, was der Maximalität von s_i widerspräche.

Definiere nun die Folge $(r_j)_{j \geq 2}$ mit $r_j \in A^*$, sodass $|r_j|$ maximal mit $u^{j-1} \in r_j A^*$ und $s_j = \text{ol}_\ell(r_j^{-1} u^{j-1}, s_{j-1} v)$ für alle $j \geq 2$ ist. Intuitiv enthält r_j also genau die übrigen Leseoperationen, die nicht benötigt werden, um s_j in u^{j-1} einzufügen.

Sei zudem $a \in A$ mit $s_{i-1} v \in A^* a s_i$. Dann muss also wegen der Maximalität von s_i auch $r_i \in (A \setminus \{a\})^*$ gelten. Weiterhin gilt nach Definition von ol_ℓ auch $s_{i+1} \neq \text{ol}_\ell(u^i, a s_i v)$. (Beachte, dass $a s_i v$ Suffix von v^i ist.) Da $v \not\leq u$ und außerdem auch $s_i \preceq r_i^{-1} u^{i-1}$ gilt, ist es unmöglich, dass $s_i v \preceq r_i^{-1} u^i$ gilt. Also muss r_{i+1} ein echtes Präfix von r_i sein, d.h. $r_{i+1} \in (A \setminus \{a\})^*$. Allerdings muss wegen $s_{i+1} \neq \text{ol}_\ell(u^i, a s_i v)$ dann $a \preceq r_{i+1}$ gelten. Dies ist ein Widerspruch.

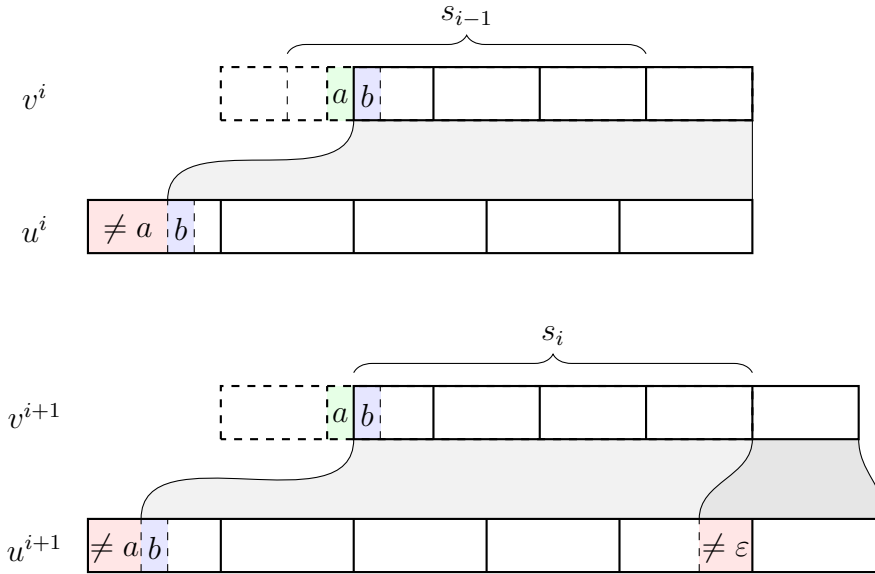


Abbildung 5.2. Die Beweisidee

■

5.2 Das Kriterium

Nun kann also endlich das Nicht-Einbettungs-Kriterium für die vergesslichen Warteschlangen formuliert und bewiesen werden.

Satz 5.5. Seien $n \in \mathbb{N}$, \mathcal{M} ein Monoid, $u, v \in \mathcal{M}$ und $\phi: \mathcal{M} \rightarrow \text{NF}_\ell^{(n)}$ ein Homomorphismus mit

- (i) für alle $l, r \in \mathcal{M}$ gilt $lur \neq lvr$,
- (ii) $\pi(\phi(u)) = \pi(\phi(v))$ und
- (iii) $\bar{\pi}(\phi(u)) = \bar{\pi}(\phi(v))$.

Dann ist ϕ nicht injektiv, d.h. ϕ ist keine Einbettung.

Beweis. Seien $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3 \in A^*$ Wörter mit $u_3 \preceq u_2, v_3 \preceq v_2$ und

$$\phi(u) = \overline{u_1} \langle\langle u_2, \overline{u_3} \rangle\rangle \quad \text{ sowie } \quad \phi(v) = \overline{v_1} \langle\langle v_2, \overline{v_3} \rangle\rangle.$$

Gilt $\pi(\phi(u)) = \pi(\phi(v)) = \varepsilon$, so gilt $\phi(u) = \overline{\pi(\phi(u))} = \overline{\pi(\phi(v))} = \phi(v)$ und ϕ ist nicht injektiv. Analog gilt dies auch für $\overline{\pi(\phi(u))} = \overline{\pi(\phi(v))} = \varepsilon$. Gelte also ab jetzt $\pi(\phi(u)), \overline{\pi(\phi(u))} \neq \varepsilon$. Nach (iii) gilt $v_1 \in u_1 A^*$ oder $u_1 \in v_1 A^*$. O.B.d.A. wird $u_1 \in v_1 A^*$ angenommen.

Idee. Es soll nun die Folge $(\phi(u^i))_{i \in \mathbb{N}_+}$ betrachtet werden. Da $\overline{\pi}$ und ϕ Homomorphismen sind, gilt $\overline{\pi}(\phi(u^i)) = \overline{\pi(\phi(u))^i}$. Da $\overline{\pi(\phi(u))} \neq \varepsilon$ gilt, ist die Anzahl der Leseoperationen für diese Folge streng monoton wachsend. Nach Lemma 4.3 teilen sich diese in ein Anfangsstück $\lambda(\phi(u^i))$ und in einen Shuffleteil $\mu(\phi(u^i))$ auf. Es muss also mindestens eine der beiden Folgen $(|\lambda(\phi(u^i))|)_{i \in \mathbb{N}_+}$ oder $(|\mu(\phi(u^i))|)_{i \in \mathbb{N}_+}$ monoton wachsend und bestimmt divergent sein.

Ist die erstere Folge divergent, so kann gezeigt werden, dass $\lambda(\phi(u^{i_0}))$ für irgendein $i_0 \in \mathbb{N}_+$ lang genug ist, sodass $\overline{\pi(\phi(v))}$ vollständig in $\lambda(\phi(vv u^{i_0}))$ passt und damit $\overline{\pi(\phi(v))}$ und $\pi(\phi(v))$ in $\phi(vv u^{i_0})$ strikt getrennt werden können. Damit ergibt sich schließlich, dass $\phi(vv u^{i_0}) = \phi(vv u^{i_0+1})$ gilt. Ist dagegen die zweite Folge divergent, so kann analog gezeigt werden, dass $\mu(\phi(u^{i_0}))$ hinreichend lang ist für ein $i_0 \in \mathbb{N}_+$, sodass $\phi(u^{i_0} v v) = \phi(u^{i_0+1} v)$ gilt. In allen beiden Fällen ist dies schließlich ein Widerspruch zur Injektivität von ϕ .

Sei also zunächst $(s_i)_{i \in \mathbb{N}_+}$ die Folge aus Lemma 5.2, d.h.

$$s_1 := \varepsilon \quad \text{ und } \quad s_{i+1} := \text{ol}_\ell(u_2^i, s_i u_3 u_1)$$

für alle $i \in \mathbb{N}_+$. Für alle $i \in \mathbb{N}_+$ gilt also nach diesem Lemma:

$$\phi(u^i) = \overline{(u_1 u_3)^{i-1} u_1 s_i^{-1}} \langle\langle u_2^i, \overline{s_i u_3} \rangle\rangle.$$

Es muss einer der folgenden Fälle eintreten:

(Fall 1) Die Folge $(|\lambda(\phi(u^i))|)_{i \in \mathbb{N}_+}$ ist monoton wachsend und bestimmt divergent. Für alle $i \in \mathbb{N}_+$ gibt es dann ein $j \geq i$ mit $|\lambda(\phi(u^{j+1}))| > |\lambda(\phi(u^j))|$ und damit auch $s_{j+1} \neq s_j u_3 u_1$ nach Lemma 5.3. Definiere weiterhin die Folge $(t_i)_{i \in \mathbb{N}_+}$ mit

$$t_i := \text{ol}_\ell(v_2, v_3 (u_1 u_3)^{i-1} u_1 s_i^{-1})$$

für alle $i \in \mathbb{N}_+$, d.h. es gilt

$$\phi(vu^i) = \overline{v_1 v_3 (u_1 u_3)^{i-1} u_1 s_i^{-1} t_i^{-1}} \langle\langle v_2 u_2^i, \overline{t_i s_i u_3} \rangle\rangle.$$

Da $v_1 v_3$ konstante Länge besitzt, ist auch $(|\lambda(\phi(vu^i))|)_{i \in \mathbb{N}_+}$ monoton wachsend und bestimmt divergent. Es muss also ein $i_0 \in \mathbb{N}_+$ existieren, sodass für alle $i \geq i_0$

$$\lambda(\phi(vu^i)) \in \overline{\pi(\phi(vu))} A^+ \tag{5.1}$$

gilt. Wähle dieses mit $i_0 \geq 2$ und $s_{i_0} \neq s_{i_0-1}u_3u_1$. Um zu zeigen, dass ϕ nicht injektiv ist, genügt es nach (i) $\phi(vu^{i_0+1}) = \phi(vvu^{i_0})$ zu beweisen. Es gilt:

$$\begin{aligned}\phi(vu^{i_0+1}) &= \overline{v_1v_3(u_1u_3)^{i_0}u_1s_{i_0+1}^{-1}t_{i_0+1}^{-1}} \langle\langle v_2u_2^{i_0+1}, \overline{t_{i_0+1}s_{i_0+1}u_3} \rangle\rangle, \\ \phi(vvu^{i_0}) &= \overline{(v_1v_3)^2(u_1u_3)^{i_0-1}u_1s_{i_0}^{-1}t_{i_0+1}^{-1}r^{-1}} \langle\langle v_2^2u_2^{i_0}, \overline{rt_{i_0}s_{i_0}u_3} \rangle\rangle,\end{aligned}$$

wobei $r = \text{ol}_\ell(v_2, v_3v_1v_3(u_1u_3)^{i_0-1}u_1s_{i_0}^{-1}t_{i_0}^{-1})$ gilt. Wegen (ii), (iii) und Korollar 4.7 muss also $t_{i_0+1}s_{i_0+1}u_3 = rt_{i_0}s_{i_0}u_3$ gelten. Es gilt:

$$\begin{aligned}t_{i_0+1}s_{i_0+1} &= \text{ol}_\ell(v_2, v_3(u_1u_3)^{i_0}u_1s_{i_0+1}^{-1}) s_{i_0+1} \\ &= \text{ol}_\ell(v_2u_2^{i_0}, v_3(u_1u_3)^{i_0}u_1) \quad (\text{nach Lemmata 5.1 + 5.4}) \\ &= \text{ol}_\ell(u_2^{i_0+1}, (u_1u_3)^{i_0}u_1), \quad (\text{nach (ii) + (5.1)})\end{aligned}$$

wobei wegen (5.1) $|t_{i_0+1}s_{i_0+1}| < |(u_1u_3)^{i_0}u_1|$ gilt, sowie

$$\begin{aligned}rt_{i_0}s_{i_0} &= \text{ol}_\ell(v_2, v_3v_1v_3(u_1u_3)^{i_0-1}u_1s_{i_0}^{-1}t_{i_0}^{-1}) t_{i_0}s_{i_0} \\ &= \text{ol}_\ell(v_2v_2, v_3v_1v_3(u_1u_3)^{i_0-1}u_1s_{i_0}^{-1}) s_{i_0} \quad (\text{nach Lemma 5.1}) \\ &= \text{ol}_\ell(v_2v_2u_2^{i_0-1}, v_3v_1v_3(u_1u_3)^{i_0-1}u_1) \quad (\text{nach Lemma 5.1}) \\ &= \text{ol}_\ell(u_2^{i_0+1}, v_3(u_1u_3)^{i_0}u_1). \quad (\text{nach (ii) + (iii)})\end{aligned}$$

Offensichtlich ist $(u_1u_3)^{i_0}u_1$ ein Suffix von $v_3(u_1u_3)^{i_0}u_1$. Nach der Definition von ol_ℓ und wegen $|t_{i_0+1}s_{i_0+1}| < |(u_1u_3)^{i_0}u_1|$ kann dann auch der Präfix v_3 von $v_3(u_1u_3)^{i_0}u_1$ kein Bestandteil der Überlappung sein. Es gilt also

$$|rt_{i_0}s_{i_0}| < |(u_1u_3)^{i_0}u_1|,$$

woraus letztlich $t_{i_0+1}s_{i_0+1}u_3 = rt_{i_0}s_{i_0}u_3$ folgt.

(Fall 2) Die Folge $(|\lambda(\phi(u^i))|)_{i \in \mathbb{N}_+}$ ist konvergent, d.h. es gibt ein $i_0 \in \mathbb{N}_+$, sodass für alle $i \geq i_0$ gilt $\lambda(\phi(u^i)) = \lambda(\phi(u^{i_0}))$. Dann ist aber die Folge $(|\mu(\phi(u^i))|)_{i \in \mathbb{N}_+}$ monoton wachsend und bestimmt divergent. Insbesondere gilt nach Lemma 5.3 für alle $i \geq i_0$ auch $s_{i+1} = s_iu_3u_1$. Definiere nun die Folge $(t_i)_{i \in \mathbb{N}_+}$ mit

$$t_i := \text{ol}_\ell(u_2^i, s_iu_3v_1)$$

für alle $i \in \mathbb{N}_+$, d.h. es gilt

$$\phi(u^i v) = \overline{(u_1u_3)^i v_1 t_i^{-1}} \langle\langle u_2^i v_2, \overline{t_i v_3} \rangle\rangle.$$

Nach Wahl von i_0 und wegen $u_1 \in v_1 A^*$ gilt dann $t_i = s_i u_3 v_1$ für alle $i \geq i_0$. Es soll nun $\phi(u^{i_0} v v) = \phi(u^{i_0+1} v)$ gezeigt werden. Wegen (i) ist ϕ dann nicht injektiv. Es gilt also:

$$\begin{aligned}\phi(u^{i_0} v v) &= \overline{(u_1u_3)^{i_0} v_1 v_3 v_1 r^{-1}} \langle\langle u_2^{i_0} v_2 v_2, \overline{r v_3} \rangle\rangle, \\ \phi(u^{i_0+1} v) &= \overline{(u_1u_3)^{i_0+1} v_1 t_{i_0+1}^{-1}} \langle\langle u_2^{i_0+1} v_2, \overline{t_{i_0+1} v_3} \rangle\rangle,\end{aligned}$$

wobei $r = \text{ol}_\ell(u_2^{i_0}v_2, t_{i_0}v_3v_1)$ gilt, d.h. wegen (ii), (iii) und Korollar 4.7 gilt $rv_3 = t_{i_0+1}v_3$. Es gilt

$$\begin{aligned} r &= \text{ol}_\ell(u_2^{i_0}v_2, t_{i_0}v_3v_1) \\ &= \text{ol}_\ell(u_2^{i_0}v_2, s_{i_0}u_3v_1v_3v_1) \\ &= \text{ol}_\ell(u_2^{i_0+1}, s_{i_0}u_3u_1u_3v_1) && \text{(nach (ii) + (iii))} \\ &= \text{ol}_\ell(u_2^{i_0+1}, s_{i_0+1}u_3v_1) && \text{(nach Wahl von } i_0) \\ &= t_{i_0+1}. \end{aligned}$$

Also gilt $\phi(u^{i_0}vv) = \phi(u^{i_0+1}v)$. ■

Bemerkung 5.6. Die Bedingung (i) ist stärker, als für den Beweis des Kriteriums benötigt wird. So ist es also nicht zwingend notwendig, dass $lur \neq lvr$ für alle $l, r \in \mathcal{M}$ gilt. Der Beweis kann auch ohne Veränderung geführt werden, wenn die Ungleichung für alle l und r aus dem Erzeugnis $\{u, v\}^* \subseteq \mathcal{M}$ von u und v erfüllt ist.

Des Weiteren lässt sich mithilfe des Kriteriums ein Schema zum Beweis dafür, dass sich ein Monoid \mathcal{M} nicht in $\mathcal{Q}_\ell^{(n)}$ einbetten lässt, gewinnen. So hat sich bei der Erstellung dieser Ausarbeitung (insbesondere der Kapitel VI und VII) die folgende Vorgehensweise als hilfreich erwiesen:

- (1) Nehme an, dass es einen injektiven Homomorphismus $\phi: \mathcal{M} \rightarrow \mathbf{NF}_\ell^{(n)}$ gäbe.
- (2) Finde zwei disjunkte Teilmengen $C_1, C_2 \subseteq \mathcal{M}$ mit $|C_1|, |C_2| \geq 2$, sodass je zwei Elemente $a \in C_1$ und $b \in C_2$ (gegebenenfalls mit einem gewissen Kontext) kommutiert werden können. Zudem soll es in Menge C_1 zwei Elemente a und b geben, die (unabhängig vom Kontext) nicht kommutabel sind.
- (3) Finde in C_1 und C_2 jeweils ein Element, dessen Bild sowohl Lese- als auch Schreiboperationen enthält.
- (4) Damit folgt schließlich mit Proposition 2.2, dass die Projektionen auf Lese- bzw. Schreiboperationen der Bilder aller Elemente aus Teilmenge C_1 (d.h. $\pi(\phi(C_1))$ und $\bar{\pi}(\phi(C_1))$) jeweils abel'sch sind.

Beweis. Seien $c_1 \in C_1$ und $c_2 \in C_2$ die Elemente aus Schritt (3). Seien weiterhin $a, b \in C_1$. Dann sind $\pi(\phi(a))$, $\pi(\phi(b))$ und $\pi(\phi(c_1))$ jeweils mit $\pi(\phi(c_2))$ kommutabel (nach Wahl der Teilmengen C_1 und C_2 in Schritt (2)). Nach Proposition 2.2 sind dann auch $\pi(\phi(a))$ und $\pi(\phi(b))$ jeweils mit $\pi(\phi(c_1))$ kommutabel. Erneut mit Proposition 2.2 folgt dann auch die Kommutativität von $\pi(\phi(a))$ und $\pi(\phi(b))$.

Analog lässt sich dies auch für die Projektionen auf die Leseoperationen beweisen. ■

- (5) Für die Elemente $a, b \in C_1$ aus Schritt (2) kann nun Satz 5.5 auf $u := ab$ und $v := ba$ angewandt werden. Dies führt schließlich zu einem Widerspruch, weshalb sich also \mathcal{M} nicht in $\mathcal{Q}_\ell^{(n)}$ einbetten lässt.

5.3 Beispiel: Direktes Produkt zweier freier Monoide

Das eben genannte Beweisschema soll nun anhand des direkten Produkts zweier freier Monoide beispielhaft vorgeführt werden.

Angenommen, $\phi: \{a, b\}^* \times \{c, d\}^* \rightarrow \mathbf{NF}_\ell^{(2)}$ wäre ein injektiver Homomorphismus (dies ist Schritt (1)). Sei dann $A = \{a, b\}$ ein Alphabet mit $\mathbf{NF}_\ell^{(2)} \subseteq (A \cup \bar{A})^*$. Definiere zur Vereinfachung der Notation den Homomorphismus

$$\eta: \{a, b, c, d\}^* \rightarrow \{a, b\}^* \times \{c, d\}^*,$$

welcher auf natürliche Weise aus dem Erzeugendensystem $\{a, b, c, d\}$ induziert wird, mit

$$\eta(a) = (a, \varepsilon), \quad \eta(b) = (b, \varepsilon), \quad \eta(c) = (\varepsilon, c), \quad \eta(d) = (\varepsilon, d).$$

Weiterhin gibt es für alle $\alpha \in \{a, b, c, d\}$ Wörter $u_{\alpha,1}, u_{\alpha,2}, u_{\alpha,3} \in A^*$ mit $u_{\alpha,3} \preceq u_{\alpha,2}$ und

$$\phi(\eta(\alpha)) = \overline{u_{\alpha,1}} \langle u_{\alpha,2}, \overline{u_{\alpha,3}} \rangle.$$

Eine geeignete Wahl für die Teilmengen aus Schritt (2) ist

$$C_1 = \{(u, \varepsilon) \mid u \in \{a, b\}^+\} \quad \text{und} \quad C_2 = \{(\varepsilon, v) \mid v \in \{c, d\}^+\}.$$

Die Erfüllung der Anforderungen an die beiden Teilmengen lässt sich leicht nachweisen. Dies impliziert schließlich das erste, noch recht einfache Lemma:

Lemma 5.7. *Sei $\phi: \{a, b\}^* \times \{c, d\}^* \rightarrow \mathbf{NF}_\ell^{(2)}$ ein Homomorphismus. Dann gilt für alle $(u, v) \in \{a, b\}^* \times \{c, d\}^*$:*

$$(i) \quad \bar{\pi}(\phi(u, \varepsilon))\bar{\pi}(\phi(\varepsilon, v)) = \bar{\pi}(\phi(\varepsilon, v))\bar{\pi}(\phi(u, \varepsilon)).$$

$$(ii) \quad \pi(\phi(u, \varepsilon))\pi(\phi(\varepsilon, v)) = \pi(\phi(\varepsilon, v))\pi(\phi(u, \varepsilon)).$$

In Schritt (3) soll gezeigt werden, dass es in beiden Teilmengen ein Element gibt, das mindestens eine Schreib- und Leseoperation enthält. Hierbei genügt es jeweils, die erzeugenden Elemente der Teilmenge zu betrachten. Zunächst wird gezeigt, dass alle Elemente einer der Teilmengen jeweils mindestens eine Schreiboperation enthalten, sowie analog auch, dass alle Elemente einer Teilmenge (nicht zwingend die andere) jeweils mindestens eine Leseoperation enthalten.

Lemma 5.8. *Sei $\phi: \{a, b\}^* \times \{c, d\}^* \rightarrow \mathbf{NF}_\ell^{(2)}$ ein injektiver Homomorphismus. Dann gilt:*

$$(i) \quad \varepsilon \notin \{\bar{\pi}(\phi(a, \varepsilon)), \bar{\pi}(\phi(b, \varepsilon))\} \quad \text{oder} \quad \varepsilon \notin \{\bar{\pi}(\phi(\varepsilon, c)), \bar{\pi}(\phi(\varepsilon, d))\}.$$

$$(ii) \quad \varepsilon \notin \{\pi(\phi(a, \varepsilon)), \pi(\phi(b, \varepsilon))\} \quad \text{oder} \quad \varepsilon \notin \{\pi(\phi(\varepsilon, c)), \pi(\phi(\varepsilon, d))\}.$$

Beweis.

- (i) Angenommen, die Aussage gelte nicht. Dann existiert also ein Paar $(\alpha, \beta) \in \{a, b\} \times \{c, d\}$ mit $\bar{\pi}(\phi(\alpha, \varepsilon)) = \bar{\pi}(\phi(\varepsilon, \beta)) = \varepsilon$. Wegen Lemma 5.7(ii) und Proposition 2.1 gibt es dann ein $q \in A^+$ und $k, l \in \mathbb{N}$ mit $\phi(\alpha, \varepsilon) = q^k$ und $\phi(\varepsilon, \beta) = q^l$. Dann gilt aber

$$\phi(\alpha^l, \varepsilon) = \phi(\alpha, \varepsilon)^l = (q^k)^l = q^{k \cdot l} = (q^l)^k = \phi(\varepsilon, \beta)^k = \phi(\varepsilon, \beta^k).$$

Dies widerspricht jedoch der Injektivität von ϕ , da $(\alpha^l, \varepsilon) \neq (\varepsilon, \beta^k)$.

- (ii) Dies ist symmetrisch zu (i). ■

Das nächste Lemma betrachtet den Fall, dass das Bild einer der beiden Teilmengen C_1 und C_2 nur aus Schreib- bzw. nur aus Leseoperationen besteht. Dies ist eher technisch und wird ausschließlich im darauffolgenden Lemma benötigt.

Lemma 5.9. *Sei $\phi: \{a, b\}^* \times \{c, d\}^* \rightarrow \mathbf{NF}_\ell^{(2)}$ ein injektiver Homomorphismus. Dann gilt:*

$$(i) \quad \bar{\pi}(\phi(a, \varepsilon)) = \bar{\pi}(\phi(b, \varepsilon)) = \varepsilon \Leftrightarrow \pi(\phi(\varepsilon, c)) = \pi(\phi(\varepsilon, d)) = \varepsilon.$$

$$(ii) \quad \pi(\phi(a, \varepsilon)) = \pi(\phi(b, \varepsilon)) = \varepsilon \Leftrightarrow \bar{\pi}(\phi(\varepsilon, c)) = \bar{\pi}(\phi(\varepsilon, d)) = \varepsilon.$$

Beweis.

- (i) “ \Rightarrow ”: Gelte $\bar{\pi}(\phi(a, \varepsilon)) = \bar{\pi}(\phi(b, \varepsilon)) = \varepsilon$. Angenommen, es gelte (o.B.d.A.) $\pi(\phi(\varepsilon, c)) \neq \varepsilon$. Dann gilt also $\pi(\phi(a, \varepsilon)), \pi(\phi(b, \varepsilon)), \pi(\phi(\varepsilon, c)) \neq \varepsilon$. Wegen Lemma 5.7(ii) und Proposition 2.2 gilt dann aber

$$\pi(\phi(a, \varepsilon))\pi(\phi(b, \varepsilon)) = \pi(\phi(b, \varepsilon))\pi(\phi(a, \varepsilon))$$

und damit $\phi(ab, \varepsilon) = \phi(ba, \varepsilon)$ - im Widerspruch zur Injektivität von ϕ .

“ \Leftarrow ”: Dies wird analog gezeigt.

- (ii) Dies ist symmetrisch zu (i). ■

Damit kann nun endlich die eigentliche Aussage aus Schritt (3) gezeigt werden:

Lemma 5.10. *Sei $\phi: \{a, b\}^* \times \{c, d\}^* \rightarrow \mathbf{NF}_\ell^{(2)}$ ein injektiver Homomorphismus. Dann gilt:*

$$(i) \quad |\{\alpha \in \{a, b, c, d\} \mid \bar{\pi}(\phi(\eta(\alpha))) \neq \varepsilon\}| \geq 3.$$

$$(ii) \quad |\{\alpha \in \{a, b, c, d\} \mid \pi(\phi(\eta(\alpha))) \neq \varepsilon\}| \geq 3.$$

Beweis.

- (i) Angenommen, es gelte (o.B.d.A.) $\bar{\pi}(\phi(a, \varepsilon)) = \bar{\pi}(\phi(b, \varepsilon)) = \varepsilon$. Dann gilt nach Lemma 5.9(i) auch $\pi(\phi(\varepsilon, c)) = \pi(\phi(\varepsilon, d)) = \varepsilon$. Da ϕ injektiv ist, muss $\phi(ab, \varepsilon) \neq \phi(ba, \varepsilon)$ gelten und somit $a, b \preceq u_{a,2}u_{b,2}$ (andernfalls, wäre $\phi(a, \varepsilon), \phi(b, \varepsilon) \in a^*$ oder $\phi(a, \varepsilon), \phi(b, \varepsilon) \in b^*$ und damit ϕ ebenfalls nicht injektiv). Dann gilt:

$$\phi(a, \varepsilon)\phi(b, \varepsilon)\phi(\varepsilon, c) = \overline{u_{c,1}s^{-1}}\langle\langle u_{a,2}u_{b,2}, \bar{s} \rangle\rangle = \overline{u_{c,1}}u_{a,2}u_{b,2} = \phi(\varepsilon, c)\phi(a, \varepsilon)\phi(b, \varepsilon)$$

mit $s = \text{ol}_\ell(u_{a,2}u_{b,2}, u_{c,1}) = \varepsilon$. Also muss ein $\alpha \in A$ existieren mit $u_{c,1} \in A^*\alpha$ und $\alpha \not\preceq u_{a,2}u_{b,2}$. Dann gilt aber $\alpha \in A \setminus \{a, b\} = \emptyset$ - Widerspruch!

- (ii) Dies folgt unmittelbar aus (i) und Lemma 5.9. ■

Aus Lemma 5.10 kann nun Schritt (4) gefolgert werden, d.h. die Projektionen auf die Lese- und Schreiboperationen der Elemente aus $C_1 \cup C_2$ sind kommutativ.

Korollar 5.11. *Sei $\phi: \{a, b\}^* \times \{c, d\}^* \rightarrow \text{NF}_\ell^{(2)}$ ein injektiver Homomorphismus. Dann gilt für alle $\alpha, \beta \in \{a, b, c, d\}$:*

$$(i) \quad \bar{\pi}(\phi(\eta(\alpha)))\bar{\pi}(\phi(\eta(\beta))) = \bar{\pi}(\phi(\eta(\beta)))\bar{\pi}(\phi(\eta(\alpha))).$$

$$(ii) \quad \pi(\phi(\eta(\alpha)))\pi(\phi(\eta(\beta))) = \pi(\phi(\eta(\beta)))\pi(\phi(\eta(\alpha))).$$

Im letzten Schritt wird endlich der Widerspruch zu Injektivität von ϕ herbeigeführt. Nach Definition des Monoids $\{a, b\}^* \times \{c, d\}^*$ gilt

$$\text{für alle } (l_1, l_2), (r_1, r_2) \in \{a, b\}^* \times \{c, d\}^* : (l_1abr_1, l_2r_2) \neq (l_1bar_1, l_2r_2).$$

Damit ist für $u := (ab, \varepsilon)$ und $v := (ba, \varepsilon)$ Bedingung (i) von Satz 5.5 erfüllt. Die anderen beiden Bedingungen folgen unmittelbar aus Korollar 5.11. Somit ist nach Satz 5.5 ϕ nicht injektiv - ein Widerspruch zur Annahme! Es kann also gefolgert werden:

Satz 5.12. *$\{a, b\}^* \times \{c, d\}^*$ lässt sich nicht in $\mathcal{Q}_\ell^{(2)}$ einbetten.*

Natürlich stellt sich nun auch die Frage, ob dieselbe Aussage auch für $\mathcal{Q}_\ell^{(n)}$ mit $n > 2$ gilt. Bei genauer Betrachtung des Beweises von Lemma 5.10 lässt sich jedoch für den Fall $n = 3$ kein Widerspruch mehr finden. Tatsächlich lässt sich mit etwas Überlegung sogar ein relativ einfacher injektiver Homomorphismus von $\{a, b\}^* \times \{c, d\}^*$ in $\mathcal{Q}_\ell^{(3)}$ finden, was im Beweis der folgenden Proposition dargestellt werden soll.

Proposition 5.13. $\{a, b\}^* \times \{c, d\}^*$ lässt sich in $\mathcal{Q}_\ell^{(3)}$ einbetten.

Beweis. Sei $A = \{a, b, c\}$ ein Alphabet mit $\mathbf{NF}_\ell^{(3)} \subseteq (A \cup \bar{A})^*$. Definiere den Homomorphismus $\phi: \{a, b\}^* \times \{c, d\}^* \rightarrow \mathbf{NF}_\ell^{(3)}$ auf natürliche Weise durch:

$$\phi(a, \varepsilon) = a, \quad \phi(b, \varepsilon) = b, \quad \phi(\varepsilon, c) = \bar{ac}, \quad \phi(\varepsilon, d) = \bar{bc}.$$

Behauptung 1. ϕ ist wohldefiniert.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass für alle $(u, v) \in \{a, b\}^* \times \{c, d\}^*$

$$\phi(u, \varepsilon)\phi(\varepsilon, v) = \phi(\varepsilon, v)\phi(u, \varepsilon)$$

gilt.

Seien also $(u, v) \in \{a, b\}^* \times \{c, d\}^*$. Es gilt nach Definition von ϕ :

$$\begin{aligned} \phi(u, \varepsilon)\phi(\varepsilon, v) &= \overline{\pi(\phi(\varepsilon, v))s^{-1}} \langle \pi(\phi(u, \varepsilon)), \bar{s} \rangle \quad \text{und} \\ \phi(\varepsilon, v)\phi(u, \varepsilon) &= \overline{\pi(\phi(\varepsilon, v))} \pi(\phi(u, \varepsilon)), \end{aligned}$$

wobei $s = \mathbf{ol}_\ell(\pi(\phi(u, \varepsilon)), \overline{\pi(\phi(\varepsilon, v))})$. Da $\phi(u, \varepsilon) \in \{a, b\}^* = (A \setminus \{c\})^*$ und $\phi(\varepsilon, v) \in \{\bar{ac}, \bar{bc}\}^*$ gilt, muss schließlich $s = \varepsilon$ gelten und damit die gewünschte Aussage. q.e.d.

Aus dem Beweis von Behauptung 1 folgt dann für alle $(u, v) \in \{a, b\}^* \times \{c, d\}^*$, dass auch

$$\phi(u, v) = \overline{\pi(\phi(\varepsilon, v))} \pi(\phi(u, \varepsilon))$$

gilt. Es muss nun nur noch die Injektivität von ϕ gezeigt werden.

Behauptung 2. ϕ ist injektiv.

Beweis. Seien $(u, v), (u', v') \in \{a, b\}^* \times \{c, d\}^*$ mit $\phi(u, v) = \phi(u', v')$. Es gilt also:

$$\overline{\pi(\phi(\varepsilon, v))} = \overline{\pi(\phi(\varepsilon, v'))} \quad \text{und} \quad \pi(\phi(u, \varepsilon)) = \pi(\phi(u', \varepsilon)).$$

Es ist leicht ersichtlich, dass die Abbildungen

$$\begin{aligned} f: \{a, b\}^* &\rightarrow A^*: w \mapsto \pi(\phi(w, \varepsilon)) \quad \text{und} \\ g: \{c, d\}^* &\rightarrow A^*: w \mapsto \overline{\pi(\phi(\varepsilon, w))} \end{aligned}$$

injektiv sind. Also gilt $u = u'$ und $v = v'$. q.e.d.

■

In den folgenden beiden Kapiteln wird das obige Beweisschema erneut für die Nicht-Einbettungen von $\mathcal{Q}_\ell^{(n)}$ in $\mathcal{Q}_\ell^{(m)}$ mit $n > m$ bzw. $\mathcal{Q}_r^{(2)}$ in $\mathcal{Q}_r^{(n)}$ verwendet. Anschließend werden in Kapitel VIII die Aussagen dieses Abschnitts erneut aufgegriffen, wenn die Klassen der sich in $\mathcal{Q}_\ell^{(n)}$ einbettenden Spurmonoide untersucht werden.

KAPITEL VI

Einbettung in vergessliche Warteschlangen mit wenigen Symbolen

In [HKZ14, Korollar 5.5] wurde gezeigt, dass sich $\mathcal{Q}_r^{(n)}$ in $\mathcal{Q}_r^{(2)}$ für beliebige $n \in \mathbb{N}_+$ einbetten lässt. In diesem Kapitel soll deshalb untersucht werden, ob Ähnliches auch für vergessliche Warteschlangen möglich ist. Ein erstes Negativ-Resultat ergibt sich allerdings unmittelbar aus Satz 5.12 und Proposition 5.13:

Korollar 6.1. *Sei $n > 2$. Dann lässt sich $\mathcal{Q}_\ell^{(n)}$ nicht in $\mathcal{Q}_\ell^{(2)}$ einbetten.*

Diese Aussage soll nun verallgemeinert werden. Dazu soll wieder das Beweisschema aus Abschnitt 5.2 benutzt werden. Die beiden Teilmengen aus dem Schema werden dazu zur Menge der Schreib- bzw. Leseoperationen gewählt. Es soll bewiesen werden, dass es dann zwei Schreiboperationen gibt, deren Projektionen des Bildes kommutativ sind. So kann letztlich wieder Satz 5.5 angewandt werden.

Seien also $m, n \in \mathbb{N}_+$ mit $n > m$, $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ und B Alphabete mit $|B| = m$, $\mathbf{NF}_\ell^{(n)} \subseteq (A \cup \overline{A})^*$ und $\mathbf{NF}_\ell^{(m)} \subseteq (B \cup \overline{B})^*$. Sei weiterhin $\phi: \mathbf{NF}_\ell^{(n)} \rightarrow \mathbf{NF}_\ell^{(m)}$ ein Homomorphismus.

Für $1 \leq i \leq n$ definiere Wörter $u_{i,1}, u_{i,2}, u_{i,3}, v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3} \in B^*$ mit $u_{i,3} \preceq u_{i,2}$, $v_{i,3} \preceq v_{i,2}$, $\phi(a_i) = \overline{u_{i,1}} \langle\langle u_{i,2}, \overline{u_{i,3}} \rangle\rangle$ und $\phi(\overline{a_i}) = \overline{v_{i,1}} \langle\langle v_{i,2}, \overline{v_{i,3}} \rangle\rangle$.

Für $1 \leq i, j \leq n$ definiere weiterhin $q_{i,j}, r_{i,j}, s_{i,j}, t_{i,j} \in B^*$ mit:

$$\begin{aligned} s_{i,j} &= \text{ol}_\ell(u_{i,2}, u_{i,3}v_{j,1}), & t_{i,j} &= u_{i,3}v_{j,1}s_{i,j}^{-1}, \\ q_{i,j} &= \text{ol}_\ell(v_{j,2}, v_{j,3}u_{i,1}), & r_{i,j} &= v_{j,3}u_{i,1}q_{i,j}^{-1}. \end{aligned}$$

Es gilt also:

$$\begin{aligned} \phi(a_i \overline{a_j}) &= \overline{u_{i,1}t_{i,j}} \langle\langle u_{i,2}v_{j,2}, \overline{s_{i,j}v_{j,3}} \rangle\rangle, \\ \phi(\overline{a_j} a_i) &= \overline{v_{j,1}r_{i,j}} \langle\langle v_{j,2}u_{i,2}, \overline{q_{i,j}u_{i,3}} \rangle\rangle. \end{aligned}$$

Zunächst wird gezeigt, dass die Projektionen des Bildes einer beliebigen Schreib- und Leseoperation kommutiert werden können.

Lemma 6.2. *Seien $m, n \in \mathbb{N}_+$ mit $n > m$, $\phi: \mathbf{NF}_\ell^{(n)} \rightarrow \mathbf{NF}_\ell^{(m)}$ ein Homomorphismus und $1 \leq i, j \leq n$. Dann gilt:*

$$(i) \quad \bar{\pi}(\phi(a_i \bar{a}_j)) = \bar{\pi}(\phi(\bar{a}_j a_i)) \text{ und}$$

$$(ii) \quad \pi(\phi(a_i \bar{a}_j)) = \pi(\phi(\bar{a}_j a_i)).$$

Beweis. Es gilt $a_i a_i \bar{a}_j \equiv_\ell a_i \bar{a}_j a_i$ nach Lemma 3.8, also nach Lemma 3.9 auch

$$\pi(\phi(a_i a_i \bar{a}_j)) = \pi(\phi(a_i \bar{a}_j a_i)) \quad \text{und} \quad \bar{\pi}(\phi(a_i a_i \bar{a}_j)) = \bar{\pi}(\phi(a_i \bar{a}_j a_i)).$$

Da ϕ , π und $\bar{\pi}$ Homomorphismen sind, folgt dann auch $\pi(\phi(a_i \bar{a}_j)) = \pi(\phi(\bar{a}_j a_i))$ und $\bar{\pi}(\phi(a_i \bar{a}_j)) = \bar{\pi}(\phi(\bar{a}_j a_i))$. ■

Als nächstes soll gezeigt werden, dass Lese- und Schreiboperationen durch die Einbettung ϕ erhalten bleiben.

Lemma 6.3. *Seien $m, n \in \mathbb{N}_+$ mit $n > m$ und $\phi: \mathbf{NF}_\ell^{(n)} \rightarrow \mathbf{NF}_\ell^{(m)}$ ein injektiver Homomorphismus. Dann gilt:*

$$(i) \quad \text{Für alle } 1 \leq i \leq n \text{ gilt: } \bar{\pi}(\phi(\bar{a}_i)) \neq \varepsilon.$$

$$(ii) \quad \text{Für alle } 1 \leq i \leq n \text{ gilt: } \pi(\phi(a_i)) \neq \varepsilon.$$

Beweis.

(i) Angenommen, es gäbe ein $1 \leq i \leq n$ mit $v_{i,1} = \varepsilon$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \phi(a_i \bar{a}_i a_i) &\equiv_\ell \overline{u_{i,1} t_{i,i}} \langle \langle u_{i,2} v_{i,2}, \overline{s_{i,i} v_{i,3}} \rangle \rangle \langle \langle v_{i,2}, \overline{v_{i,3}} \rangle \rangle \\ &\equiv_\ell \overline{r_{i,i}} \langle \langle v_{i,2} u_{i,2}, \overline{q_{i,i} u_{i,3}} \rangle \rangle \langle \langle v_{i,2}, \overline{v_{i,3}} \rangle \rangle \\ &\equiv_\ell \phi(\bar{a}_i a_i \bar{a}_i). \end{aligned}$$

Nach Korollar 4.15(ii) gilt dann aber auch

$$\phi(a_i \bar{a}_i) \equiv_\ell \overline{u_{i,1} t_{i,i}} \langle \langle u_{i,2} v_{i,2}, \overline{s_{i,i} v_{i,3}} \rangle \rangle \equiv_\ell \overline{r_{i,i}} \langle \langle v_{i,2} u_{i,2}, \overline{q_{i,i} u_{i,3}} \rangle \rangle \equiv_\ell \phi(\bar{a}_i a_i)$$

und nach Korollar 4.5 auch $\phi(a_i \bar{a}_i) = \phi(\bar{a}_i a_i)$ - im Widerspruch zur Injektivität von ϕ , da $a_i \bar{a}_i \not\equiv_\ell \bar{a}_i a_i$ gilt.

(ii) Dies wird analog mithilfe von Korollar 4.15(i) bewiesen. ■

Das nächste Lemma besagt, dass es Lese- und Schreiboperationen gibt, deren Bilder jeweils sowohl Lese- als auch Schreiboperationen enthalten.

Lemma 6.4. Seien $m, n \in \mathbb{N}_+$ mit $n > m$ und $\phi: \mathbf{NF}_\ell^{(n)} \rightarrow \mathbf{NF}_\ell^{(m)}$ ein injektiver Homomorphismus. Dann gilt:

- (i) Es gibt ein $1 \leq i \leq n$ mit $\bar{\pi}(\phi(a_i)) \neq \varepsilon$.
- (ii) Es gibt ein $1 \leq i \leq n$ mit $\pi(\phi(\bar{a}_i)) \neq \varepsilon$.

Beweis.

- (i) Angenommen, es gilt $u_{i,1}u_{i,3} = \varepsilon$ für alle $1 \leq i \leq n$. Dann gilt $\phi(a_i) = u_{i,2}$. Es gilt für alle $1 \leq i, j \leq n$ mit $i \neq j$:

$$\phi(a_i \bar{a}_j) = \bar{t}_{i,j} \langle\langle u_{i,2} v_{j,2}, \bar{s}_{i,j} \bar{v}_{j,3} \rangle\rangle = \bar{v}_{j,1} \langle\langle v_{j,2} u_{i,2}, \bar{v}_{j,3} \rangle\rangle = \phi(\bar{a}_j a_i),$$

wobei $s_{i,j} = \text{ol}_\ell(u_{i,2}, v_{j,1}) = \varepsilon$ und $t_{i,j} = v_{j,1}$ gilt. Es muss also ein $c_j \in B$ existieren mit $v_{j,1} \in B^* c_j$ und $c_j \not\leq u_{i,2}$. Des Weiteren gilt für alle $1 \leq i \leq n$

$$\phi(a_i \bar{a}_i) = \bar{t}_{i,i} \langle\langle u_{i,2} v_{i,2}, \bar{s}_{i,i} \bar{v}_{i,3} \rangle\rangle \neq \bar{v}_{i,1} \langle\langle v_{i,2} u_{i,2}, \bar{v}_{i,3} \rangle\rangle = \phi(\bar{a}_i a_i)$$

und damit $s_{i,i} \neq \varepsilon$. Es gilt also $c_i \leq u_{i,2}$ und damit für $1 \leq j \leq n$ mit $i \neq j$ auch $c_i \neq c_j$. Dies ist jedoch ein Widerspruch zu $|B| = m < n$.

- (ii) Angenommen, es gilt $v_{i,2} = \varepsilon$ für alle $1 \leq i \leq n$. Wegen (i) gibt es ein $1 \leq i \leq n$ mit $u_{i,1}u_{i,3} \neq \varepsilon$. Sei $1 \leq j \leq n$ mit $i \neq j$ beliebig. Dann kann Proposition 2.2 angewendet werden. Es gilt also:

$$\phi(\bar{a}_i \bar{a}_j) = \bar{v}_{i,1} \bar{v}_{j,1} = \bar{v}_{j,1} \bar{v}_{i,1} = \phi(\bar{a}_j \bar{a}_i)$$

- ein Widerspruch zur Injektivität von ϕ . ■

Damit kann schließlich die eigentliche gewünschte Aussage gezeigt werden:

Satz 6.5. Seien $m, n \in \mathbb{N}_+$ mit $n > m$. Dann lässt sich $\mathcal{Q}_\ell^{(n)}$ nicht in $\mathcal{Q}_\ell^{(m)}$ einbetten.

Beweis. Angenommen, $\phi: \mathbf{NF}_\ell^{(n)} \rightarrow \mathbf{NF}_\ell^{(m)}$ wäre eine Einbettung. Es soll erneut ein Widerspruch mithilfe von Satz 5.5 herbei geführt werden.

Seien also $1 \leq i < j \leq n$ mit $\bar{\pi}(\phi(a_i)), \pi(\phi(\bar{a}_j)) \neq \varepsilon$. Nach Lemma 3.9(ii) gilt $ua_i a_j v \not\equiv_\ell ua_j a_i v$ für alle $u, v \in \mathbf{NF}_\ell^{(n)}$. Also ist Bedingung (i) von Satz 5.5 für a_i und a_j erfüllt. Die Bedingungen (ii) und (iii) dagegen folgen unmittelbar aus der Wahl von i und j sowie Proposition 2.2.

Nach Satz 5.5 ist ϕ also nicht injektiv - Widerspruch! ■

KAPITEL VII

Einbettung zuverlässiger Warteschlangen

In diesem vorletzten Kapitel soll nun die Beziehung zwischen vergesslichen und zuverlässigen Warteschlangen untersucht werden. Da sich die Definitionen der zugrundeliegenden Operationsfunktionen \cdot und \circ sehr ähnlich sind, liegt die Vermutung nahe, dass sich diese ineinander einbetten lassen. Nach Satz 6.5 ist dies allerdings nicht in beiden Richtungen möglich. Hier soll nun gezeigt werden, dass sich weder $\mathcal{Q}_\ell^{(n)}$ in $\mathcal{Q}_r^{(n)}$ einbetten lässt noch umgekehrt.

7.1 Einbettung von $\mathcal{Q}_r^{(n)}$ in $\mathcal{Q}_\ell^{(n)}$

Zunächst soll gezeigt werden, dass sich zuverlässige Warteschlangen nicht durch vergessliche simulieren lassen. Nach [HKZ14, Korollar 5.5] genügt es hierbei die Einbettung von $\mathcal{Q}_r^{(2)}$ in $\mathcal{Q}_\ell^{(n)}$ zu betrachten. Dieser Beweis erfolgt analog zum Beweis in Kapitel VI. Es wird also erneut das Beweisschema aus Abschnitt 5.2 angewandt, indem die dort geforderten Teilmengen als die Mengen der Lese- bzw. Schreiboperationen gewählt werden.

Seien hierzu $n \in \mathbb{N}$, $A = \{a, b\}$ und B Alphabete mit $|B| = n$, $\text{NF}_r^{(2)} \subseteq (A \cup \bar{A})^*$ und $\text{NF}_\ell^{(n)} \subseteq (B \cup \bar{B})^*$. Sei weiterhin $\phi: \text{NF}_r^{(2)} \rightarrow \text{NF}_\ell^{(n)}$ ein Homomorphismus.

Für $\alpha \in A$ definiere Wörter $u_{\alpha,1}, u_{\alpha,2}, u_{\alpha,3}, v_{\alpha,1}, v_{\alpha,2}, v_{\alpha,3} \in B^*$ mit $u_{\alpha,3} \preceq u_{\alpha,2}$, $v_{\alpha,3} \preceq v_{\alpha,2}$,

$$\phi(\alpha) = \overline{u_{\alpha,1}} \langle\langle u_{\alpha,2}, \overline{u_{\alpha,3}} \rangle\rangle \quad \text{und} \quad \phi(\bar{\alpha}) = \overline{v_{\alpha,1}} \langle\langle v_{\alpha,2}, \overline{v_{\alpha,3}} \rangle\rangle.$$

Das folgende Lemma enthält bereits sämtliche für den Beweis der Nicht-Einbettung von $\mathcal{Q}_r^{(2)}$ in $\mathcal{Q}_\ell^{(n)}$ notwendigen Aussagen:

Lemma 7.1. *Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\phi: \text{NF}_r^{(2)} \rightarrow \text{NF}_\ell^{(n)}$ ein injektiver Homomorphismus. Dann gelten folgende Aussagen:*

(i) *Für alle $\alpha, \beta \in A$ gilt*

$$\pi(\phi(\alpha\bar{\beta})) = \pi(\phi(\bar{\beta}\alpha)) \quad \text{und} \quad \bar{\pi}(\phi(\alpha\bar{\beta})) = \bar{\pi}(\phi(\bar{\beta}\alpha)).$$

(ii) *Für alle $\alpha \in A$ gilt $\pi(\phi(\alpha)) \neq \varepsilon$ und $\bar{\pi}(\phi(\bar{\alpha})) \neq \varepsilon$.*

(iii) $\bar{\pi}(\phi(ab)) = \varepsilon$ genau dann, wenn $\pi(\phi(\bar{ab})) = \varepsilon$.

(iv) Es gibt $\alpha, \beta \in A$ mit $\bar{\pi}(\phi(\alpha)) \neq \varepsilon$ und $\pi(\phi(\bar{\beta})) \neq \varepsilon$.

(v) Für alle $\alpha, \beta \in A$ gilt

$$\pi(\phi(\alpha\beta)) = \pi(\phi(\beta\alpha)) \quad \text{und} \quad \bar{\pi}(\phi(\alpha\beta)) = \bar{\pi}(\phi(\beta\alpha)).$$

Beweis.

(i) Dies gilt mit Satz 2.5 analog zu Lemma 6.2.

(ii) Dies wird analog zu Lemma 6.3(i) und (ii) bewiesen, da für $\alpha \in A$ nach Satz 2.5 ebenfalls

$$\alpha\alpha\bar{\alpha} \equiv_r \alpha\bar{\alpha}\alpha, \quad \alpha\bar{\alpha}\bar{\alpha} \equiv_r \bar{\alpha}\alpha\bar{\alpha}, \quad \alpha\bar{\alpha} \not\equiv_r \bar{\alpha}\alpha$$

gilt.

(iii) Dies wird analog zu Lemma 5.9 bewiesen.

(iv) Angenommen, es gelte $u_{a,1}u_{a,3} = u_{b,1}u_{b,3} = \varepsilon$. Dann gilt nach (iii) auch $v_{a,2} = v_{b,2} = \varepsilon$. Es gilt:

$$\phi(a\bar{a}) = \overline{v_{a,1}s^{-1}} \langle u_{a,2}, \bar{s} \rangle \neq \overline{v_{a,1}} u_{a,2} = \phi(\bar{a}a),$$

wobei $s = \text{ol}_\ell(u_{a,2}, v_{a,1}) \neq \varepsilon$ nach Korollar 4.7. Es gilt aber auch

$$\phi(ba\bar{a}) = \overline{v_{a,1}s^{-1}t^{-1}} \langle u_{b,2}u_{a,2}, \bar{t}s \rangle = \overline{v_{a,1}} u_{b,2}u_{a,2} = \phi(\bar{a}ba)$$

mit $t = \text{ol}_\ell(u_{b,2}, v_{a,1}s^{-1})$. Also gilt nach Korollar 4.7 auch $ts = \varepsilon$. Dies ist aber ein Widerspruch zu $s \neq \varepsilon$.

(v) Dies wird analog zu Korollar 5.11 bewiesen. ■

Aus Lemma 7.1 und Satz 2.7 folgt, dass wieder Satz 5.5 angewendet und damit die folgende Aussage geschlussfolgert werden kann:

Satz 7.2. Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann lässt sich $\mathcal{Q}_r^{(2)}$ nicht in $\mathcal{Q}_\ell^{(n)}$ einbetten.

7.2 Das Nicht-Einbettungs-Kriterium für $\mathcal{Q}_r^{(n)}$

Auch die Umkehrung von Satz 7.2 soll wie bisher mithilfe des Beweisschemas aus Abschnitt 5.2 bewiesen werden. Da allerdings Satz 5.5 nicht angewandt werden kann, soll zunächst eine analoge Aussage für $\mathcal{Q}_\ell^{(2)}$ gezeigt werden.

Satz 7.3. Seien \mathcal{M} ein Monoid, $u, v \in \mathcal{M}$ und $\phi: \mathcal{M} \rightarrow \text{NF}_r^{(2)}$ ein Homomorphismus mit

(i) für alle $l, r \in \mathcal{M}$ gilt $lur \neq lvr$,

(ii) $\pi(\phi(u)) = \pi(\phi(v))$ und

(iii) $\bar{\pi}(\phi(u)) = \bar{\pi}(\phi(v))$.

Dann ist ϕ nicht injektiv, d.h. ϕ ist keine Einbettung.

Beweis. Seien $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3 \in A^*$ Wörter mit

$$\phi(u) = \overline{u_1} \langle u_2, \overline{u_2} \rangle u_3 \quad \text{sowie} \quad \phi(v) = \overline{v_1} \langle v_2, \overline{v_2} \rangle v_3.$$

Gilt $\pi(\phi(u)) = \varepsilon$ oder $\bar{\pi}(\phi(u)) = \varepsilon$, so gilt analog zu Satz 5.5 $\phi(u) = \phi(v)$ und damit, dass ϕ nicht injektiv ist. Gelte also ab jetzt $\pi(\phi(u)), \bar{\pi}(\phi(u)) \neq \varepsilon$. Nach (iii) gilt $v_1 \in u_1 A^*$ oder $u_1 \in v_1 A^*$. O.B.d.A. wird $u_1 \in v_1 A^*$ angenommen.

Idee. Der Beweis erfolgt vollkommen analog zum Beweis von Satz 5.5. Es wird also wieder die Folge $(\phi(u^i))_{i \in \mathbb{N}}$ betrachtet. Da $\bar{\pi}(\phi(u)) \neq \varepsilon$ ist, muss $(|\lambda(\phi(u^i))|)_{i \in \mathbb{N}}$ oder $(|\mu(\phi(u^i))|)_{i \in \mathbb{N}}$ bestimmt divergent sein. Es kann also wieder $\bar{\pi}(\phi(v))$ und $\pi(\phi(v))$ in $\phi(vvu^i)$ bzw. $\phi(u^i vv)$ voneinander getrennt werden, sodass wieder gilt:

$$\phi(vvu^i) = \phi(vu^{i+1}) \quad \text{oder} \quad \phi(u^i vv) = \phi(u^{i+1}v)$$

für ein hinreichend großes $i \in \mathbb{N}$.

Betrachte zunächst die Folge $(s_i)_{i \in \mathbb{N}}$, welche wie folgt definiert ist:

$$s_0 := \varepsilon \quad \text{und} \quad s_{i+1} := \text{ol}_l(u_2 u_3 s_i, u_2 (u_1 u_2)^i)$$

für alle $i \in \mathbb{N}$. Es gilt also analog zu Lemma 5.2 für alle $i \in \mathbb{N}$:

$$\phi(u^i) = \overline{(u_1 u_2)^i s_i^{-1}} \langle s_i, \overline{s_i} \rangle s_i^{-1} (u_2 u_3)^i.$$

Dann muss einer der folgenden Fälle eintreten:

(Fall 1) Die Folge $(|\lambda(\phi(u^i))|)_{i \in \mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und bestimmt divergent. Definiere weiterhin die Folge $(t_i)_{i \in \mathbb{N}}$, sodass für alle $i \in \mathbb{N}$

$$t_i := \text{ol}_r(v_2 v_3 s_i, v_2 (u_1 u_2)^i)$$

gilt, d.h. es gilt

$$\phi(vu^i) = \overline{v_1 v_2 (u_1 u_2)^i t_i^{-1}} \langle t_i, \overline{t_i} \rangle t_i^{-1} v_2 v_3 (u_2 u_3)^i.$$

Da v_1v_3 konstante Länge besitzt, ist auch $(|\lambda(\phi(vu^i))|)_{i \in \mathbb{N}_+}$ monoton wachsend und bestimmt divergent. Es muss also ein $i_0 \in \mathbb{N}$ existieren, sodass für alle $i \geq i_0$

$$\lambda(\phi(vu^i)) \in \bar{\pi}(\phi(vu))A^+ \quad (7.1)$$

gilt. Es soll nun $\phi(vu^{i_0+1}) = \phi(vvu^{i_0})$ gezeigt werden. Wegen (i) folgt dann, dass ϕ nicht injektiv ist. Es gilt:

$$\begin{aligned} \phi(vu^{i_0+1}) &= \overline{v_1v_2(u_1u_2)^{i_0+1}t_{i_0+1}^{-1}} \langle t_{i_0+1}, \overline{t_{i_0+1}} \rangle t_{i_0+1}^{-1} v_2v_3(u_2u_3)^{i_0+1}, \\ \phi(vvu^{i_0}) &= \overline{(v_1v_2)^2(u_1u_2)^{i_0}r^{-1}} \langle r, \bar{r} \rangle r^{-1} (v_2v_3)^2(u_2u_3)^{i_0}, \end{aligned}$$

wobei $r = \text{ol}_r(v_2v_3t_{i_0}, v_2v_1v_2(u_1u_2)^{i_0})$ gilt. Wegen (ii), (iii) und Satz 2.7 muss also $t_{i_0+1} = r$ gelten. Es gilt:

$$\begin{aligned} t_{i_0} &= \text{ol}_r(v_2v_3s_{i_0}, v_2(u_1u_2)^{i_0}) \\ &= \text{ol}_r(v_2v_3s_{i_0}, (u_1u_2)^{i_0-1}) && \text{(nach (7.1))} \\ &= \text{ol}_r(u_2u_3s_{i_0}, (u_1u_2)^{i_0-1}) && \text{(nach (ii))} \\ &= \text{ol}_r(u_2u_3s_{i_0}, u_2(u_1u_2)^{i_0}) && \text{(nach (7.1))} \\ &= s_{i_0+1} \end{aligned}$$

und damit schließlich:

$$\begin{aligned} r &= \text{ol}_r(v_2v_3t_{i_0}, v_2v_1v_2(u_1u_2)^{i_0}) \\ &= \text{ol}_r(v_2v_3s_{i_0+1}, v_2v_1v_2(u_1u_2)^{i_0}) \\ &= \text{ol}_r(v_2v_3s_{i_0+1}, v_2(u_1u_2)^{i_0+1}) && \text{(nach (iii))} \\ &= t_{i_0+1}. \end{aligned}$$

Also gilt $\phi(vu^{i_0+1}) = \phi(vvu^{i_0})$.

(Fall 2) Die Folge $(|\lambda(\phi(u^i))|)_{i \in \mathbb{N}}$ ist konvergent, d.h. es gibt ein $i_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $j \geq i_0$ gilt $\lambda(\phi(u^{i_0})) = \lambda(\phi(u^j))$. Dann ist aber die Folge $(|\mu(\phi(u^i))|)_{i \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend und bestimmt divergent. Insbesondere gilt (analog zu Lemma 5.3) für alle $i \geq i_0$ auch $s_{i+1} = s_i u_1 u_2$. (Beachte, dass auch $s_{i+1} = \text{ol}_r((u_2u_3)^i u_2, s_i u_1 u_2)$ gilt!) Definiere nun die Folge $(t_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit

$$t_i := \text{ol}_r((u_2u_3)^i v_2, s_i v_1 v_2)$$

für alle $i \in \mathbb{N}$, d.h. es gilt

$$\phi(u^i v) = \overline{(u_1u_3)^i v_1 v_2 t_i^{-1}} \langle t_i, \bar{t}_i \rangle t_i^{-1} (u_2u_3)^i v_2 v_3.$$

Nach Wahl von i_0 gilt dann $t_i = s_i v_1 v_2 \stackrel{\text{(iii)}}{=} s_{i+1}$ für alle $i \geq i_0$. Es soll nun $\phi(u^{i_0} v v) = \phi(u^{i_0+1} v)$ gezeigt werden. Wegen (i) ist ϕ dann nicht injektiv. Es gilt also:

$$\begin{aligned} \phi(u^{i_0} v v) &= \overline{(u_1u_2)^{i_0} (v_1v_2)^2 r^{-1}} \langle r, \bar{r} \rangle r^{-1} (u_2u_3)^{i_0} (v_1v_2)^2, \\ \phi(u^{i_0+1} v) &= \overline{(u_1u_2)^{i_0+1} v_1 v_2 t_{i_0+1}^{-1}} \langle t_{i_0+1}, \bar{t}_{i_0+1} \rangle t_{i_0+1}^{-1} (u_2u_3)^{i_0+1} v_1 v_2, \end{aligned}$$

wobei $r = \text{ol}_r((u_2u_3)^{i_0}v_2v_3v_2, t_{i_0}v_1v_2)$ gilt, d.h. wegen (ii), (iii) und Satz 2.7 gilt $r = t_{i_0+1}$. Es gilt

$$\begin{aligned} r &= \text{ol}_r\left((u_2u_3)^{i_0}v_2v_3v_2, t_{i_0}v_1v_2\right) \\ &= \text{ol}_r\left((u_2u_3)^{i_0}v_2v_3v_2, s_{i_0+1}v_1v_2\right) \\ &= \text{ol}_r\left((u_2u_3)^{i_0+1}v_2, s_{i_0+1}v_1v_2\right) \quad (\text{nach (ii)}) \\ &= t_{i_0+1}. \end{aligned}$$

Also gilt $\phi(u^{i_0}vv) = \phi(u^{i_0+1}v)$. ■

Analog zu Satz 5.5 ergibt sich aus Satz 7.3 wieder ein Beweisschema zum Nachweis der Nicht-Einbettung eines Monoids in $\mathcal{Q}_r^{(2)}$. Dieses soll nun im nächsten Abschnitt einmal angewendet werden.

Bemerkung 7.4. In Kapitel VIII wird gezeigt, dass die Klassen der in $\mathcal{Q}_r^{(2)}$ und der in $\mathcal{Q}_\ell^{(3)}$ einbettenden Spurmonoide gleich sind. In [KP16] wurde dabei ein länglicher, sehr komplizierter Beweis für die Implikation “(S2) \Rightarrow (S4)” von Satz 8.4 angegeben. Unter Verwendung von Satz 7.3 kann diese Implikation genauso wie die Implikation “(S1) \Rightarrow (S4)” bewiesen werden, womit sich der Beweis deutlich vereinfacht.

7.3 Einbettung von $\mathcal{Q}_\ell^{(n)}$ in $\mathcal{Q}_r^{(n)}$

Auch die Nicht-Einbettung von $\mathcal{Q}_\ell^{(n)}$ in $\mathcal{Q}_r^{(2)}$ kann nach demselben Schema wie auch bereits in der Umkehrung in Abschnitt 7.1 bewiesen werden.

Seien $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$, $A = \{a, b\}$ und B Alphabete mit $|B| = n$ sowie $\text{NF}_r^{(2)} \subseteq (A \cup \bar{A})^*$ und $\text{NF}_\ell^{(n)} \subseteq (B \cup \bar{B})^*$. Sei weiterhin $\phi: \text{NF}_\ell^{(n)} \rightarrow \text{NF}_r^{(2)}$ ein Homomorphismus.

Für $\alpha \in B$ definiere Wörter $u_{\alpha,1}, u_{\alpha,2}, u_{\alpha,3}, v_{\alpha,1}, v_{\alpha,2}, v_{\alpha,3} \in B^*$ mit

$$\phi(\alpha) = \overline{u_{\alpha,1}}\langle u_{\alpha,2}, \overline{u_{\alpha,2}} \rangle u_{\alpha,3} \quad \text{und} \quad \phi(\bar{\alpha}) = \overline{v_{\alpha,1}}\langle v_{\alpha,2}, \overline{v_{\alpha,2}} \rangle v_{\alpha,3}.$$

Die zum Beweis notwendigen Aussagen werden im folgenden Lemma bewiesen:

Lemma 7.5. *Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\phi: \text{NF}_\ell^{(n)} \rightarrow \text{NF}_r^{(2)}$ ein injektiver Homomorphismus. Dann gelten folgende Aussagen:*

(i) *Für alle $\alpha, \beta \in B$ gilt*

$$\bar{\pi}(\phi(\alpha\bar{\beta})) = \bar{\pi}(\phi(\bar{\beta}\alpha)) \quad \text{und} \quad \pi(\phi(\alpha\bar{\beta})) = \pi(\phi(\bar{\beta}\alpha)).$$

(ii) *Für alle $\alpha \in B$ gilt $\pi(\phi(\alpha)) \neq \varepsilon$ und $\bar{\pi}(\phi(\bar{\alpha})) \neq \varepsilon$.*

(iii) *Für alle $\alpha \in B$ gilt $\pi(\phi(\bar{\alpha})) = \varepsilon$ genau dann, wenn auch für alle $\alpha \in B$ $\bar{\pi}(\phi(\alpha)) = \varepsilon$ gilt.*

(iv) Es gibt $\alpha, \beta \in B$ mit $\bar{\pi}(\phi(\alpha)) \neq \varepsilon$ und $\pi(\phi(\bar{\beta})) \neq \varepsilon$.

(v) Für alle $\alpha, \beta \in B$ gilt

$$\bar{\pi}(\phi(\alpha\beta)) = \bar{\pi}(\phi(\beta\alpha)) \quad \text{und} \quad \pi(\phi(\alpha\beta)) = \pi(\phi(\beta\alpha)).$$

Beweis.

(i) Dies ist unter Verwendung von Satz 2.5 analog zu Lemma 6.2.

(ii) Angenommen, es gäbe ein $\alpha \in B$ mit $\bar{\pi}(\phi(\bar{\alpha})) = \varepsilon$. Dann gilt also $\phi(\bar{\alpha}) = v_{\alpha,3}$ und damit nach Lemma 3.8

$$\begin{aligned} \phi(\alpha\bar{\alpha}) &= \overline{u_{\alpha,1}} \langle u_{\alpha,2}, \overline{u_{\alpha,2}} \rangle u_{\alpha,3} v_{\alpha,3} v_{\alpha,3} \\ &= \overline{u_{\alpha,1} u_{\alpha,2} s^{-1}} \langle s, \bar{s} \rangle s^{-1} v_{\alpha,3} u_{\alpha,2} u_{\alpha,3} v_{\alpha,3} \\ &= \phi(\bar{\alpha}\alpha), \end{aligned}$$

wobei $s = \text{ol}_r(v_{\alpha,3} u_{\alpha,2}, u_{\alpha,1} u_{\alpha,2}) = u_{\alpha,2}$ nach Satz 2.7 ist. Dann gilt aber auch $\phi(\alpha\bar{\alpha}) = \phi(\bar{\alpha}\alpha)$ - im Widerspruch zur Injektivität, da $\alpha\bar{\alpha} \not\equiv_{\ell} \bar{\alpha}\alpha$ gilt.

Die zweite Aussage kann unter Verwendung der Gleichung

$$\alpha\bar{\alpha} \equiv_{\ell} \bar{\alpha}\alpha$$

analog gezeigt werden.

(iii) Dies wird analog zu Lemma 5.9 bewiesen.

(iv) Angenommen, es gelte $\phi(\alpha) = u_{\alpha,3}$ für alle $\alpha \in B$. Dann gilt nach (iii) auch $\phi(\bar{\alpha}) = \overline{v_{\alpha,1}}$ für alle $\alpha \in B$. Seien nun $\alpha, \beta \in B$ mit $\alpha \neq \beta$. Dann gibt es nach [HKZ14, Korollar 3.8] ein $k \in \mathbb{N}$ mit $|u_{\beta,3}^k| \geq |v_{\alpha,1}|$ und

$$\phi(\beta^k \alpha \bar{\alpha}) \equiv_r u_{\beta,2}^k u_{\alpha,3} \overline{v_{\alpha,1}} \equiv_r u_{\beta,2}^k \overline{v_{\alpha,1}} u_{\alpha,3} \equiv_r \phi(\beta^k \bar{\alpha} \alpha).$$

Wegen Satz 2.7 gilt dann auch $\phi(\beta^k \alpha \bar{\alpha}) = \phi(\beta^k \bar{\alpha} \alpha)$ - im Widerspruch zur Injektivität von ϕ , da $\beta^k \alpha \bar{\alpha} \not\equiv_{\ell} \beta^k \bar{\alpha} \alpha$ gilt.

(v) Dies wird analog zu Korollar 5.11 bewiesen. ■

Unter Verwendung der Lemmata 7.5 und 3.9 gelten die Bedingungen von Satz 7.3 für $\alpha\beta$ und $\beta\alpha$ mit $\alpha, \beta \in B$ und $\alpha \neq \beta$. Es kann also gefolgert werden:

Satz 7.6. Sei $n \geq 2$. Dann lässt sich $\mathcal{Q}_{\ell}^{(n)}$ nicht in $\mathcal{Q}_r^{(2)}$ einbetten.

KAPITEL VIII

Einbettung von Spurmonoiden

Im letzten Kapitel dieser Arbeit sollen Einbettungen von sogenannten Spurmonoiden in das Transformationsmonoid einer vergesslichen Warteschlange untersucht werden. Spurmonoiden werden verwendet, um nebenläufige Systeme zu modellieren (siehe [Maz77]). In [KP16] wurden bereits die Einbettungen in das Transformationsmonoid zuverlässiger Warteschlangen betrachtet und gezeigt, dass die Klasse der Spurmonoiden, die in $\mathcal{Q}_r^{(2)}$ einbetten, genau der Klasse entspricht, die in $\{a, b\}^* \times \{c, d\}^*$ eingebettet werden können. In Abschnitt 8.2 wird gezeigt, dass diese Klasse auch genau die Klasse der Spurmonoiden ist, die sich in $\mathcal{Q}_\ell^{(n)}$ mit $n \geq 3$ einbetten lassen. Da mit Satz 5.12 zudem bewiesen wurde, dass $\{a, b\}^* \times \{c, d\}^*$ nicht in $\mathcal{Q}_\ell^{(2)}$ eingebettet werden kann, wird dieser Fall in Abschnitt 8.3 separat untersucht. Zunächst sollen allerdings die wichtigsten Grundlagen über Spurmonoiden wiederholt werden.

8.1 Grundlagen

Zu Beginn soll der Begriff des Unabhängigkeits-Alphabets eingeführt werden:

Definition 8.1. Sei Γ eine nicht-leere, abzählbare Menge und $I \subseteq \Gamma^2$ eine symmetrische, irreflexive Relation auf Γ . Dann heißt (Γ, I) ein **Unabhängigkeits-Alphabet** und I die zugehörige Unabhängigkeits-Relation. Entsprechend wird $D := \Gamma^2 \setminus I$ als die Abhängigkeits-Relation und (Γ, D) als das Abhängigkeits-Alphabet bezeichnet.

Ein Unabhängigkeits-Alphabet ist somit also als ein schleifenfreier, ungerichteter Graph zu verstehen. Die Intuition im Sinne der Nebenläufigkeit sieht dabei wie folgt aus: Γ ist eine Menge von Prozessen. Mit der Unabhängigkeits-Relation wird dann Parallelität zwischen diesen Prozessen festgelegt. Das heißt, Prozesse a und b dürfen parallel laufen (weil sie bspw. auf unterschiedliche Ressourcen zugreifen), wenn $(a, b) \in I$ gilt. Umgekehrt dürfen a und b nicht vertauscht werden bzw. parallel laufen (weil sie bspw. auf eine gemeinsame Ressource zugreifen), wenn $(a, b) \in D$ gilt. Damit ergibt sich dann wie folgt die Äquivalenz zweier Wörter und entsprechend das zugehörige Monoid, welches als **Spurmonoid** bezeichnet wird:

Definition 8.2.

- (i) Sei (Γ, I) ein Unabhängigkeits-Alphabet. Die Kongruenz $\equiv_I \subseteq (\Gamma^*)^2$ ist die kleinste Kongruenz, sodass für alle $(a, b) \in I$ gilt: $ab \equiv_I ba$. Die Äquivalenzklassen bzgl. \equiv_I werden hierbei als **Spuren** bezeichnet.

- (ii) Sei (Γ, I) ein Unabhängigkeits-Alphabet. Das mit (Γ, I) assoziierte **Spurmonoid** ist $\mathbb{M}(\Gamma, I) := \Gamma^*/\equiv_I$.

Zum Beweis der folgenden Sätze wird immer wieder über die Nicht-Äquivalenz zweier Wörter gesprochen. Diese wird mit dem Projektionslemma genauer charakterisiert. Dazu müssen zunächst die folgenden Projektionen definiert werden:

Seien (Γ, I) ein Unabhängigkeits-Alphabet und $X \in \Gamma$. Die Projektion $\pi_X: \Gamma^* \rightarrow X^*$ wird induktiv definiert durch:

$$\pi_X(\varepsilon) := \varepsilon,$$

$$\pi_X(au) := \begin{cases} a\pi_X(u) & , \text{ falls } a \in X \\ \pi_X(u) & , \text{ sonst} \end{cases}$$

für alle $a \in \Gamma$ und $u \in \Gamma^*$. Für $a_1, \dots, a_n \in \Gamma$ mit $n \in \mathbb{N}$ schreibt man zudem kurz $\pi_{a_1, \dots, a_n} := \pi_{\{a_1, \dots, a_n\}}$.

Das Projektionslemma ist dann die folgende Aussage:

Proposition 8.3 (Projektionslemma, [CL84, CP85]). *Seien (Γ, I) ein Unabhängigkeits-Alphabet und $u, v \in \Gamma^*$. Dann gilt $u \equiv_I v$ genau dann, wenn $\pi_{a,b}(u) = \pi_{a,b}(v)$ für alle $(a, b) \in D$ und $\pi_a(u) = \pi_a(v)$ für alle $a \in \Gamma$ gilt.*

Neben dem Projektionslemma wird auch die sogenannte lexikografische Normalform der Spuren von $\mathbb{M}(\Gamma, I)$ mehrfach verwendet. Diese lässt sich wie folgt definieren:

Sei im Folgenden Γ total geordnet und sei \leq die dazu korrespondierende lexikografische Ordnung auf Γ^* . Für eine Menge $X \subseteq \Gamma^*$ definiere das lexikografische Minimum als das eindeutig bestimmte Wort $\mathbf{min}X \in X$ mit $\mathbf{min}X \leq w$ für alle $w \in X$. Für ein $u \in \Gamma^*$ wird dann $\mathbf{nf}_{\leq}(u) := \mathbf{min}[u]_I$ als die **lexikografische Normalform** von u bzgl. (Γ, I) bezeichnet. Offensichtlich gilt für $u, v \in \Gamma^*$ mit $u \equiv_I v$ dann auch $\mathbf{nf}_{\leq}(u) = \mathbf{nf}_{\leq}(v)$ [AK79].

Weitere Informationen zu Spurmonoiden lassen sich unter anderem in [Die90, DR95] finden.

8.2 Der allgemeine Fall

In [KP16] wurde gezeigt, dass die Klasse der in $\mathcal{Q}_r^{(2)}$ einbettenden Spurmonoide genau die in $\{a, b\}^* \times \{c, d\}^*$ einbettenden Spurmonoide sind. Da in Proposition 5.13 gezeigt wurde, dass sich $\{a, b\}^* \times \{c, d\}^*$ in $\mathcal{Q}_\ell^{(3)}$ einbetten lässt, lässt sich vermuten, dass diese Klasse auch der Klasse der in $\mathcal{Q}_\ell^{(3)}$ einbettenden Spurmonoide entspricht. Genau dies soll nun auch gezeigt werden:

Satz 8.4. *Seien $n > 2$ und (Γ, I) ein Unabhängigkeits-Alphabet. Dann sind äquivalent:*

- (S1) $\mathbb{M}(\Gamma, I)$ lässt sich in $\mathcal{Q}_\ell^{(n)}$ einbetten.
- (S2) $\mathbb{M}(\Gamma, I)$ lässt sich in $\mathcal{Q}_r^{(2)}$ einbetten.
- (S3) $\mathbb{M}(\Gamma, I)$ lässt sich in $\{a, b\}^* \times \{c, d\}^*$ einbetten.
- (S4) Es gilt eine der beiden folgenden Bedingungen:
 - (i) Alle Knoten in (Γ, I) haben Grad ≤ 1 .
 - (ii) (Γ, I) hat höchstens eine nicht-triviale Zusammenhangskomponente. Diese Komponente ist vollständig bipartit.

Die Äquivalenz von (S2)-(S4) wurde bereits in [KP16] gezeigt. Weiterhin folgt die Implikation “(S3) \Rightarrow (S1)” unmittelbar aus Proposition 5.13. Die verbleibende Implikation “(S1) \Rightarrow (S4)” wird im Folgenden (auch für den Fall $n = 2$) analog zu [KP16, Kapitel 4] mit einigen Vereinfachungen gezeigt. Aus den Propositionen 8.5-8.9 und [KP16, Satz 4.14] folgt dann schließlich auch die gewünschte Aussage.

Seien also $n \geq 2$, (Γ, I) ein Unabhängigkeits-Alphabet und $\phi: \mathbb{M}(\Gamma, I) \rightarrow \mathbf{NF}_\ell^{(n)}$ eine Einbettung. Definiere zunächst eine Partitionierung $(\Gamma_+, \Gamma_-, \Gamma_\pm)$ von Γ wie folgt:

$$\begin{aligned}\Gamma_+ &:= \{\alpha \in \Gamma \mid \bar{\pi}(\phi(\alpha)) = \varepsilon\}, \\ \Gamma_- &:= \{\alpha \in \Gamma \mid \pi(\phi(\alpha)) = \varepsilon\}, \\ \Gamma_\pm &:= \Gamma \setminus (\Gamma_+ \cup \Gamma_-).\end{aligned}$$

Beachte, dass $\Gamma_+ \cap \Gamma_- = \emptyset$ gilt. Denn wäre $a \in \Gamma_+ \cap \Gamma_-$, so gilt $\phi(a) = \varepsilon$. Damit wäre ϕ nicht injektiv - im Widerspruch zur Definition von ϕ .

8.2.1 $(\Gamma_+ \cup \Gamma_-, I)$ ist vollständig bipartit

Proposition 8.5. *Seien $n \geq 2$, (Γ, I) ein Unabhängigkeits-Alphabet und $\phi: \mathbb{M}(\Gamma, I) \rightarrow \mathbf{NF}_\ell^{(n)}$ eine Einbettung. Dann ist der durch $\Gamma_+ \cup \Gamma_-$ induzierte Untergraph von (Γ, I) vollständig bipartit mit den Partitionen Γ_+ und Γ_- .*

Beweis. Angenommen, es gäbe $a, b \in \Gamma_+$ mit $(a, b) \in I$. Dann gilt $\phi(ab) = \phi(ba)$. Es gibt also nach Proposition 2.1 ein Wort $p \in A^*$ und $m_a, m_b \in \mathbb{N}_+$ mit $\phi(a) = p^{m_a}$ und $\phi(b) = p^{m_b}$. Dann gilt aber:

$$\phi(a^{m_b}) = p^{m_a \cdot m_b} = \phi(b^{m_a}).$$

Also gilt $a^{m_b} \equiv_I b^{m_a}$ und damit $a = b$ - im Widerspruch zu $(a, b) \in I$. Damit ist gezeigt, dass (Γ_+, I) diskret ist. Analog kann auch gezeigt werden, dass (Γ_-, I) diskret ist. Es muss nun nur noch gezeigt werden, dass $(a, b) \in I$ gilt für alle $a \in \Gamma_+$ und $b \in \Gamma_-$.

Seien also $a \in \Gamma_+$ und $b \in \Gamma_-$. Dann gibt es $u, v \in A^+$ mit $\phi(a) = u$ und $\phi(b) = \bar{v}$. Betrachte nun $\phi(ab^{|u|})$ und $\phi(ab^{|u|+1})$. Dann gilt:

$$\phi(ab^{|u|}) = \overline{v^{|u|}s^{-1}}\langle u, \bar{s} \rangle \quad \text{und} \quad \phi(ab^{|u|+1}) = \overline{v^{|u|+1}t^{-1}}\langle u, \bar{t} \rangle$$

mit $s = \text{ol}_\ell(u, v^{|u|})$ und $t = \text{ol}_\ell(u, v^{|u|+1})$. Es gilt $|v^{|u|}| = |v| \cdot |u| \geq |u|$ und damit $|t| \leq |v| \leq |v^{|u|}|$, d.h. $t = \text{ol}_\ell(u, v^{|u|}) = s$. Dann gilt also:

$$\phi(ab^{|u|+1}) = \overline{v^{|u|+1}t^{-1}}\langle u, \bar{t} \rangle = \overline{v^{|u|}s^{-1}}\langle u, \bar{s} \rangle = \bar{v}\phi(ab^{|u|}) = \phi(bab^{|u|}).$$

Somit gilt $ab^{|u|+1} \equiv_I bab^{|u|}$ und damit $(a, b) \in I$. ■

8.2.2 Knoten aus $\Gamma_+ \cup \Gamma_-$ sind mit allen Kanten verbunden

Proposition 8.6. *Seien $n \geq 2$, (Γ, I) ein Unabhängigkeits-Alphabet und $\phi: \mathbb{M}(\Gamma, I) \rightarrow \text{NF}_\ell^{(n)}$ eine Einbettung. Seien weiterhin $a \in \Gamma_+ \cup \Gamma_-$ und $b, c \in \Gamma$ mit $(b, c) \in I$. Dann gilt auch $(a, b) \in I$ oder $(a, c) \in I$.*

Beweis. Angenommen, die Aussage wäre falsch, d.h. $(a, b), (a, c) \notin I$. Zunächst soll gezeigt werden, dass es $x_b, x_c, y_b, y_c \in \mathbb{N}$ mit $x_a + x_b \neq 0$ gibt, sodass die Gleichungen

$$\bar{\pi}(\phi(b^{x_b}ac^{x_c})) = \bar{\pi}(\phi(c^{y_c}ab^{y_b})) \quad \text{und} \quad \pi(\phi(b^{x_b}ac^{x_c})) = \pi(\phi(c^{y_c}ab^{y_b}))$$

erfüllt sind. Wegen $\phi(bc) = \phi(cb)$ gibt es nach Lemma 3.9 und Proposition 2.1 Wörter $p, q \in A^+$ sowie $m_b, m_c, n_b, n_c \in \mathbb{N}$ mit:

$$\pi(\phi(b)) = p^{m_b}, \quad \bar{\pi}(\phi(b)) = q^{n_b}, \quad \pi(\phi(c)) = p^{m_c}, \quad \bar{\pi}(\phi(c)) = q^{n_c}.$$

Es gilt $m_b + n_b \neq 0 \neq m_c + n_c$, da ϕ injektiv ist. Betrachte nun die folgende Fallunterscheidung:

(Fall 1) Es gilt $a \in \Gamma_+$. Dann betrachte das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\left. \begin{aligned} m_b \cdot x_b &= m_c \cdot y_c \\ m_c \cdot x_c &= m_b \cdot y_b \\ n_b \cdot x_b + n_c \cdot x_c &= n_b \cdot y_b + n_c \cdot y_c \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

Im Beweis von [KP16, Lemma 4.3] wurde gezeigt, dass (8.1) eine nicht-triviale Lösung mit $x_b, x_c, y_b, y_c \in \mathbb{N}$ besitzt. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\pi(\phi(b^{x_b} a c^{x_c})) &= p^{m_b \cdot x_b} \phi(a) p^{m_c \cdot x_c} \\ &= p^{m_c \cdot y_c} \phi(a) p^{m_b \cdot y_b} \\ &= \pi(\phi(c^{y_c} a b^{y_b}))\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\bar{\pi}(\phi(b^{x_b} a c^{x_c})) &= q^{n_b \cdot x_b + n_c \cdot x_c} \\ &= q^{n_c \cdot y_c + n_b \cdot y_b} \\ &= \bar{\pi}(\phi(c^{y_c} a b^{y_b})).\end{aligned}$$

(Fall 2) Es gilt $a \in \Gamma_-$. Dann gibt es mit analoger Argumentation eine nicht-triviale Lösung $x_b, x_c, y_b, y_c \in \mathbb{N}$ des linearen Gleichungssystems

$$\left. \begin{aligned}n_b \cdot x_b &= n_c \cdot y_c \\ n_c \cdot x_c &= n_b \cdot y_b \\ m_b \cdot x_b + m_c \cdot x_c &= m_b \cdot y_b + m_c \cdot y_c.\end{aligned} \right\} \quad (8.2)$$

Damit sind also die Bedingungen (ii) und (iii) von Satz 5.5 erfüllt. Weiterhin gilt für alle $l, r \in \Gamma^*$ auch $l b^{x_b} a c^{x_c} r \not\equiv_I l c^{y_c} a b^{y_b} r$ nach dem Projektionslemma, womit auch (i) erfüllt ist. Also ist nach Satz 5.5 ϕ nicht injektiv - Widerspruch! ■

8.2.3 Knoten aus Γ_{\pm} haben höchstens Grad 1

Lemma 8.7. *Seien $n \geq 2$, (Γ, I) ein Unabhängigkeits-Alphabet und $\phi: \mathbb{M}(\Gamma, I) \rightarrow \text{NF}_{\ell}^{(n)}$ eine Einbettung. Dann ist (Γ, I) Δ -frei.*

Beweis. Angenommen, es gäbe $a, b, c \in \Gamma$ mit $(a, b), (b, c), (c, a) \in I$. Nach Proposition 8.5 gibt es dann ein $\alpha \in \{a, b, c\}$ mit $\alpha \in \Gamma_{\pm}$. Nach Proposition 2.1 gibt es dann Wörter $p, q \in A^+$, sodass für alle $\alpha \in \{a, b, c\}$ Zahlen $m_{\alpha}, n_{\alpha} \in \mathbb{N}$ existieren mit $\pi(\phi(\alpha)) = p^{m_{\alpha}}$ und $\bar{\pi}(\phi(\alpha)) = q^{n_{\alpha}}$.

Offensichtlich ist $\{(m_a, n_a), (m_b, n_b), (m_c, n_c)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ linear abhängig. O.B.d.A. sei nun (m_c, n_c) linear abhängig von den beiden anderen Vektoren. Also besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung:

$$\left. \begin{aligned}x_a \cdot m_a + x_b \cdot m_b &= x_c \cdot m_c \\ x_a \cdot n_a + x_b \cdot n_b &= x_c \cdot n_c.\end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

Mithilfe des Gauß'schen Eliminationsverfahrens kann eine nicht-triviale, rationale Lösung gefunden werden. Also besitzt (8.3) eine Lösung aus \mathbb{N}^3 . Sei $\vec{x} = (x_a, x_b, x_c) \in \mathbb{N}^3$ eine solche Lösung. Somit gilt:

$$\pi(\phi(a^{x_a} b^{x_b})) = \pi(\phi(c^{x_c})) \quad \text{und} \quad \bar{\pi}(\phi(a^{x_a} b^{x_b})) = \bar{\pi}(\phi(c^{x_c})).$$

Damit sind die Bedingungen (ii) und (iii) von Satz 5.5 für $u = a^{x_a}b^{x_b}$ und $v = c^{x_c}$ erfüllt. Weiterhin gilt nach dem Projektionslemma für beliebige $r, l \in \Gamma$ auch $lur \not\equiv_I lvr$, womit (i) aus Satz 5.5 erfüllt ist. Also ist nach Satz 5.5 ϕ nicht injektiv - im Widerspruch zur Annahme, dass ϕ eine Einbettung von $\mathbb{M}(\Gamma, I)$ in $\text{NF}_\ell^{(n)}$ ist. ■

Proposition 8.8. *Seien $n \geq 2$, (Γ, I) ein Unabhängigkeits-Alphabet, $\phi: \mathbb{M}(\Gamma, I) \rightarrow \text{NF}_\ell^{(n)}$ eine Einbettung und $a \in \Gamma_\pm$. Dann hat a Grad ≤ 1 .*

Beweis. Angenommen, es gäbe ein $a \in \Gamma_\pm$ mit Grad ≥ 2 . Dann gibt es also $b, c \in \Gamma$ mit $b \neq c$ und $(a, b), (a, c) \in I$. Nach Lemma 8.7 gilt dann $(b, c) \notin I$, d.h. für alle $u, v \in \Gamma^*$ gilt $ubcv \not\equiv_I ucbv$ nach dem Projektionslemma. Betrachte nun die folgende Fallunterscheidung:

(Fall 1) $b, c \in \Gamma_+$. Dann gilt nach Proposition 2.2 $\pi(\phi(bc)) = \pi(\phi(cb))$ und damit $bc \equiv_I cb$ - Widerspruch!

(Fall 2) $b, c \in \Gamma_-$. Dies führt analog zu Fall 1 zum Widerspruch.

(Fall 3) $b \in \Gamma_+$ und $c \in \Gamma_\pm$. Dann gilt nach Proposition 2.2 $\pi(\phi(bc)) = \pi(\phi(cb))$. Weiterhin gilt $\bar{\pi}(\phi(bc)) = \bar{\pi}(\phi(c)) = \bar{\pi}(\phi(cb))$. Nach Satz 5.5 ist dann ϕ nicht injektiv - im Widerspruch zur Annahme, dass ϕ eine Einbettung ist.

(Fall 4) $b \in \Gamma_-$ und $c \in \Gamma_\pm$. Dies führt analog zu Fall 3 zum Widerspruch.

(Fall 5) $b, c \in \Gamma_\pm$. Dann gilt nach Proposition 2.2 $\pi(\phi(bc)) = \pi(\phi(cb))$ und $\bar{\pi}(\phi(bc)) = \bar{\pi}(\phi(cb))$. Also ist ϕ nach Satz 5.5 nicht injektiv - im Widerspruch zur Annahme, dass ϕ eine Einbettung ist.

Damit führen alle möglichen Fälle zum Widerspruch, also besitzt a Grad ≤ 1 . ■

8.2.4 (Γ, I) ist P_4 -frei

Proposition 8.9. *Seien $n \geq 2$, (Γ, I) ein Unabhängigkeits-Alphabet und $\phi: \mathbb{M}(\Gamma, I) \rightarrow \text{NF}_\ell^{(n)}$ eine Einbettung. Dann ist (Γ, I) P_4 -frei.*

Beweis. Angenommen, (Γ, I) enthalte einen P_4 . Dann gibt es also paarweise verschiedene $a, b, c, d \in \Gamma$ mit $(a, b), (b, c), (c, d) \in I$ und $(a, c), (b, d) \notin I$. Wegen Proposition 8.8 muss $b, c \in \Gamma_+ \cup \Gamma_-$ gelten, da b und c Grad ≥ 2 haben. Nach Proposition 8.5 kann o.B.d.A. angenommen werden, dass $b \in \Gamma_+$ und $c \in \Gamma_-$ gilt.

Aus dem Beweis von [KP16, Proposition 4.13] folgt unmittelbar, dass es natürliche Zahlen $x_a, x_b, x_c, x_d \in \mathbb{N}$ mit $x_a, x_d \neq 0$ gibt, sodass

$$\begin{aligned} \bar{\pi}(\phi(c^{x_c} d a^{x_a} d^{x_d} b^{x_b})) &= \bar{\pi}(\phi(d b^{x_b} d^{x_d} a^{x_a} c^{x_c})) && \text{und} \\ \pi(\phi(c^{x_c} d a^{x_a} d^{x_d} b^{x_b})) &= \pi(\phi(d b^{x_b} d^{x_d} a^{x_a} c^{x_c})) \end{aligned}$$

gilt. Damit sind erneut die Bedingungen (ii) und (iii) von Satz 5.5 erfüllt. Weiterhin gilt nach dem Projektionslemma für alle $l, r \in \Gamma^*$ auch

$$lc^{x_c} da^{x_a} d^{x_d} b^{x_b} r \not\equiv_I l db^{x_b} d^{x_d} a^{x_a} c^{x_c} r.$$

Also ist nach Satz 5.5 ϕ nicht injektiv - Widerspruch! ■

8.3 Der Fall mit zwei Symbolen

Im Gegensatz zum Fall $n \geq 3$ funktioniert der Beweis der Implikation “(S3) \Rightarrow (S1)” aus Satz 8.4 für den Fall $n = 2$ nicht, da sich nach Satz 5.12 $\{a, b\}^* \times \{c, d\}^*$ nicht in $\mathcal{Q}_\ell^{(2)}$ einbetten lässt. Es kann sogar gezeigt werden, dass die Klasse der in $\mathcal{Q}_\ell^{(2)}$ einbettenden Spurmonoide echt kleiner ist als die entsprechende zu $\mathcal{Q}_\ell^{(3)}$. Dies besagt auch der folgende Satz:

Satz 8.10. *Sei (Γ, I) ein Unabhängigkeits-Alphabet. Dann sind äquivalent:*

(B1) *Das Spurmonoid $\mathbb{M}(\Gamma, I)$ lässt sich in $\mathcal{Q}_\ell^{(2)}$ einbetten.*

(B2) *Es gilt eine der beiden folgenden Bedingungen:*

(i) *Alle Knoten in (Γ, I) haben Grad ≤ 1 .*

(ii) *(Γ, I) hat höchstens eine nicht-triviale Zusammenhangskomponente. Diese Komponente ist ein Sterngraph.*

Bemerkung 8.11. In $\mathcal{Q}_\ell^{(2)}$ lässt sich $\{a\}^* \times \{b, c\}^*$ einbetten. Im Gegensatz zur Aussage in Satz 5.5 lässt sich aber feststellen, dass die Klassen der Spurmonoide, die sich in $\mathcal{Q}_\ell^{(2)}$ und $\{a\}^* \times \{b, c\}^*$ einbetten lassen, nicht übereinstimmen. Ein einfaches Beispiel hierfür ist das folgende Unabhängigkeits-Alphabet (Γ, I) :

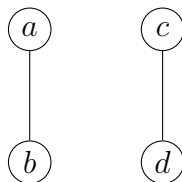


Abbildung 8.1. Der zu (Γ, I) zugehörige Graph.

Nach Satz 8.10 lässt sich $\mathbb{M}(\Gamma, I)$ in $\mathcal{Q}_\ell^{(2)}$ einbetten. Umgekehrt ist aber leicht zu sehen, dass sich $\mathbb{M}(\Gamma, I)$ nicht in $\{a\}^* \times \{b, c\}^*$ einbetten lässt.

Der Beweis von Satz 8.10 erfolgt wieder in zwei Richtungen, welche in den folgenden Unterabschnitten ausgeführt werden.

8.3.1 Beweis der Implikation “(B2) \Rightarrow (B1)”

Lemma 8.12. *Sei (Γ, I) ein Unabhängigkeits-Alphabet, dessen Knoten alle Grad ≤ 1 besitzen. Dann lässt sich $\mathbb{M}(\Gamma, I)$ in $\mathcal{Q}_\ell^{(2)}$ einbetten.*

Beweis. Sei $I = \{(l_i, r_i) \mid i \in \mathbb{N}_+\}$ und $\Gamma \setminus \{l_i, r_i \mid i \in \mathbb{N}_+\} = \{s_i \mid i \in \mathbb{N}_+\}$. Dann definiere den Homomorphismus $\phi: \Gamma^* \rightarrow \mathbf{NF}_\ell^{(2)}$ auf natürliche Weise wie folgt:

$$\begin{aligned}\phi(s_i) &:= \overline{a^i b a^i b}, \\ \phi(l_i) &:= \overline{a^i b b a^i b b}, \\ \phi(r_i) &:= \overline{a^i b b a^i b b a^i b b}\end{aligned}$$

für alle $i \in \mathbb{N}_+$. Im Weiteren sei $<$ eine Ordnung auf Γ mit $l_i < r_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Behauptung 1. Für alle $u, v \in \Gamma^*$ mit $u \equiv_I v$ gilt $\phi(u) = \phi(v)$.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass $\phi(u) = \phi(\mathbf{nf}_\leq(u))$ gilt. Dies soll per Induktion über die Anzahl k der Vertauschungsschritte jeweils zweier Symbole r_i und l_i geführt werden, die benötigt werden, um u nach $\mathbf{nf}_\leq(u)$ zu überführen.

Sei also $k = 0$. Dann gilt trivialerweise $u = \mathbf{nf}_\leq(u)$ und $\phi(u) = \phi(\mathbf{nf}_\leq(u))$. Sei nun also $k \geq 1$. Dann gibt es also ein $i \in \mathbb{N}_+$ und Wörter $u_1, u_2 \in \Gamma^*$ mit $u = u_1 r_i l_i u_2$ und $u' := u_1 l_i r_i u_2$ lässt sich in $k - 1$ Schritten nach $\mathbf{nf}_\ell(u)$ überführen. Es muss also zunächst $\phi(r_i l_i) = \phi(l_i r_i)$ gezeigt werden. Es gilt:

$$\begin{aligned}\phi(r_i l_i) &= \overline{(a^i b b)^3 s^{-1} \langle (a^i b b)^2, \bar{s} \rangle} \quad \text{und} \\ \phi(l_i r_i) &= \overline{(a^i b b)^3 t^{-1} \langle (a^i b b)^2, \bar{t} \rangle}\end{aligned}$$

mit $s = \text{ol}_\ell(a^i b b, a^i b b a^i b b)$ und $t = \text{ol}_\ell(a^i b b, a^i b b)$. Es gilt $|s|, |t| \leq |a^i b b|$ per Definition von ol_ℓ . Also muss $t = \text{ol}_\ell(a^i b b, a^i b b) = s$ gelten und damit $\phi(r_i l_i) = \phi(l_i r_i)$ nach Korollar 4.7. Somit gilt schließlich:

$$\phi(u) = \phi(u_1) \phi(r_i l_i) \phi(u_2) = \phi(u_1) \phi(l_i r_i) \phi(u_2) = \phi(u') \stackrel{\text{(IV)}}{=} \phi(\mathbf{nf}_\leq(u)). \quad \text{q.e.d.}$$

Nach Behauptung 1 ist die Abbildung

$$\psi: \mathbb{M}(\Gamma, I) \rightarrow \mathbf{NF}_\ell^{(2)}: [u]_I \mapsto \phi(u)$$

wohldefiniert. Es muss im Folgenden nur noch die Injektivität von ψ gezeigt werden.

Behauptung 2. Für alle $u, v \in \Gamma^*$ mit $\phi(u) = \phi(v)$ gilt $u \equiv_I v$.

Beweis. Es soll nun die Kontraposition gezeigt werden. Seien also $u, v \in \Gamma^*$ mit $u \not\equiv_I v$. Es kann wegen Behauptung 1 angenommen werden, dass

$$u = \text{nf}_{\leq}(u) \neq \text{nf}_{\leq}(v) = v$$

gilt. Gilt $u \in v\Gamma^+$, dann gilt nach Definition von ϕ auch $\bar{\pi}(\phi(u)) \neq \bar{\pi}(\phi(v))$ und damit nach Lemma 3.9 auch $\phi(u) \neq \phi(v)$. Analoges gilt auch für $v \in u\Gamma^+$. Gelte also ab jetzt $u \notin v\Gamma^+$, $v \notin u\Gamma^+$ und o.B.d.A. $u < v$. Dann gibt es also $x, y_1, y_2 \in \Gamma^*$ und $\alpha, \beta \in \Gamma$ mit $\alpha \neq \beta$, $u = x\alpha y_1$ und $v = x\beta y_2$.

Der einzige komplizierte Fall ist $\alpha = l_i$ und $\beta = r_i$ für ein $i \in \mathbb{N}_+$. In allen anderen Fällen gilt $\bar{\pi}(\phi(u)) \neq \bar{\pi}(\phi(v))$ und nach Lemma 3.9 auch $\phi(u) \neq \phi(v)$. (Beachte, dass zwar auch $\bar{\pi}(\phi(s_i))$ ein Präfix von $\bar{\pi}(\phi(r_i))$ und $\bar{\pi}(\phi(l_i))$ ist, aber für eine Gleichheit auf s_i ein $\alpha \in \Gamma$ mit $\bar{\pi}(\phi(\alpha)) \in bA^*$ existieren müsste, welches es aber nach Definition von ϕ nicht gibt.) Seien nun $m, n_u, n_v \in \mathbb{N}$ maximal mit $\alpha y_1 \in l_i^m r_i^{n_u} A^*$ und $\beta y_2 \in r_i^{n_v} A^*$. Beachte, dass dann gilt:

$$(l_i^m r_i^{n_u})^{-1} \alpha y_1, (r_i^{n_v})^{-1} \beta y_2 \in A^* \setminus (l_i + r_i)A^*$$

aufgrund der Definition der lexikografischen Normalform. Gilt $m + n_u \neq n_v$, so gilt

$$\pi(\phi(l_i^m r_i^{n_u})) = (a^i b b)^{m+n_u} \neq (a^i b b)^{n_v} = \pi(\phi(r_i^{n_v}))$$

und damit nach Definition von ϕ auch $\pi(\phi(u)) \neq \pi(\phi(v))$, d.h. $\phi(u) \neq \phi(v)$. Gelte also nun $m + n_u = n_v$. Dann gilt aber $m + 2n_u \neq 2n_v$ und somit

$$\bar{\pi}(\phi(l_i^m r_i^{n_u})) = (a^i b b)^{m+2n_u} \neq (a^i b b)^{2n_v} = \bar{\pi}(\phi(r_i^{n_v})),$$

d.h. analog $\bar{\pi}(\phi(u)) \neq \bar{\pi}(\phi(v))$ und $\phi(u) \neq \phi(v)$. q.e.d.

Aus Behauptung 2 folgt schließlich, dass ψ eine Einbettung von $\mathbb{M}(\Gamma, I)$ in $\text{NF}_{\ell}^{(2)}$ ist. ■

Lemma 8.13. *Sei (Γ, I) ein Unabhängigkeits-Alphabet, dessen einzige nicht-triviale Zusammenhangskomponente ein Sterngraph ist. Dann lässt sich $\mathbb{M}(\Gamma, I)$ in $\mathcal{Q}_{\ell}^{(2)}$ einbetten.*

Beweis. Sei $z \in \Gamma$ das Zentrum des Sterngraphen und $I = \{(z, s_i) \mid i \in \mathbb{N}_+\}$ sowie $\Gamma \setminus \{z, s_i \mid i \in \mathbb{N}_+\} = \{r_i \mid i \in \mathbb{N}_+\}$. Dann definiere den Homomorphismus $\phi: \Gamma^* \rightarrow \text{NF}_{\ell}^{(2)}$ auf natürliche Weise wie folgt:

$$\begin{aligned} \phi(z) &:= a, \\ \phi(s_i) &:= \overline{a^i b}, \\ \phi(r_i) &:= \overline{a^i b b b} \end{aligned}$$

für alle $i \in \mathbb{N}_+$. Im Weiteren sei $<$ eine Ordnung auf Γ mit $z < s_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Behauptung 1. Für alle $u, v \in \Gamma^*$ mit $u \equiv_I v$ gilt $\phi(u) = \phi(v)$.

Beweis. Dieser Beweis wird analog zum Beweis von Lemma 8.12 geführt. Es genügt letztendlich für die Induktion zu zeigen, dass $\phi(s_i z) = \phi(z s_i)$ für beliebiges $i \in \mathbb{N}_+$ gilt. Es gilt:

$$\phi(s_i z) = \overline{a^i b a} \quad \text{und} \quad \phi(z s_i) = \overline{a^i b s^{-1} \langle a, \bar{s} \rangle}$$

mit $s = \text{ol}_\ell(a, a^i b) = \varepsilon$. Also gilt nach Korollar 4.7 auch $\phi(s_i z) = \phi(z s_i)$. q.e.d.

Behauptung 2. Für alle $u, v \in \Gamma^*$ mit $\phi(u) = \phi(v)$ gilt $u \equiv_I v$.

Beweis. Betrachte erneut zwei $u, v \in \Gamma^*$ in lexikografischer Normalform mit $u \neq v$. Für $u \in v\Gamma^+$ und $v \in u\Gamma^+$ gilt wieder offensichtlich $\phi(u) \neq \phi(v)$. Existieren nun also $x, y_1, y_2 \in \Gamma^*$ und $\alpha, \beta \in \Gamma$ mit $\alpha \neq \beta$, $u = x\alpha y_1$ und $v = x\beta y_2$. Dann betrachte die folgenden Fälle:

(Fall 1) $(\alpha, \beta) = (z, r_i)$ für ein $i \in \mathbb{N}_+$. Dann gilt einerseits $\pi(\phi(\alpha y_1)) \in aA^*$ und andererseits $\pi(\phi(\beta y_2)) \in bA^*$ und damit $\phi(u) \neq \phi(v)$.

(Fall 2) $(\alpha, \beta) = (s_i, r_j)$ für $i, j \in \mathbb{N}_+$. Für $i \neq j$ ist $a^i b$ kein Präfix von $a^j b b$ und umgekehrt, d.h. $\bar{\pi}(\phi(\alpha y_1)) \neq \bar{\pi}(\phi(\beta y_2))$ und somit $\phi(u) \neq \phi(v)$. Gilt dagegen $i = j$, so ist $a^i b$ echtes Präfix von $a^i b b$. Damit $\bar{\pi}(\phi(\alpha y_1)) = \bar{\pi}(\phi(\beta y_2))$ gilt, muss dann $\bar{\pi}(\phi(y_1)) \in bA^*$ gelten. Dies ist nach Definition von ϕ aber nicht möglich. Also gilt auch in diesem Fall $\phi(u) \neq \phi(v)$.

(Fall 3) $(\alpha, \beta) = (r_i, r_j)$ für $i, j \in \mathbb{N}_+$ mit $i \neq j$. Dann gilt $\bar{\pi}(\phi(\alpha y_1)) \neq \bar{\pi}(\phi(\beta y_2))$, da $a^i b$ kein Präfix von $a^j b$ und umgekehrt ist. Also gilt $\phi(u) \neq \phi(v)$.

(Fall 4) $(\alpha, \beta) = (s_i, s_j)$ für $i, j \in \mathbb{N}_+$ mit $i \neq j$. Dies ist analog.

(Fall 5) $(\alpha, \beta) = (z, s_i)$ für ein $i \in \mathbb{N}_+$. Da u, v in lexikografischer Normalform sind, gilt $\beta y_2 \notin \{s_j \mid j \in \mathbb{N}_+\}^+ z \Gamma^*$. Also gilt $\pi(\phi(\beta y_2)) \in bA^*$ sowie $\pi(\phi(\alpha y_1)) \in aA^*$, d.h. erneut $\phi(u) \neq \phi(v)$. q.e.d.

Aus den Behauptungen 1 und 2 folgt schließlich analog zum Beweis von Lemma 8.12, dass sich $\mathbb{M}(\Gamma, I)$ in $\text{NF}_\ell^{(2)}$ einbetten lässt. ■

Proposition 8.14. Sei (Γ, I) ein Unabhängigkeits-Alphabet, welches eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

- (i) Alle Knoten in (Γ, I) haben Grad ≤ 1 .
- (ii) (Γ, I) hat höchstens eine nicht-triviale Zusammenhangskomponente. Diese Komponente ist ein Sterngraph.

Dann lässt sich $\mathbb{M}(\Gamma, I)$ in $\mathcal{Q}_\ell^{(2)}$ einbetten.

8.3.2 Beweis der Implikation “(B1) \Rightarrow (B2)”

Proposition 8.15. *Sei (Γ, I) ein Unabhängigkeits-Alphabet, sodass sich $\mathbb{M}(\Gamma, I)$ in $\mathcal{Q}_\ell^{(2)}$ einbetten lässt. Dann gilt eine der folgenden Bedingungen:*

- (i) *Alle Knoten in (Γ, I) haben Grad ≤ 1 .*
- (ii) *(Γ, I) hat höchstens eine nicht-triviale Zusammenhangskomponente. Diese Komponente ist ein Sterngraph.*

Beweis. Besitzen alle Knoten Grad ≤ 1 , so ist nichts mehr zu zeigen. Existiere also ein Knoten $v \in \Gamma$ mit Grad ≥ 2 . Dann gibt es in (Γ, I) nach Satz 8.4 (Beachte, dass der Beweis der Implikation “(S1) \Rightarrow (S4)” auch für den Fall $n = 2$ gültig ist.) genau eine nicht-triviale Zusammenhangskomponente, welche vollständig bipartit ist. Seien C_1, C_2 die Partitionsklassen dieser Komponente. Angenommen, es würde $|C_1|, |C_2| \geq 2$ gelten. Dann lässt sich aber $\{a, b\}^* \times \{c, d\}^*$ in $\mathbb{M}(\Gamma, I)$ einbetten, da gilt:

$$\mathbb{M} \left(\begin{array}{cc} (a) & (c) \\ & \diagdown \quad \diagup \\ & (b) & (d) \end{array} \right) \cong \{a, b\}^* \times \{c, d\}^*$$

Abbildung 8.2

Dies widerspricht jedoch Satz 5.12. Also gilt $|C_1| = 1$ und $|C_2| \geq 2$ oder umgekehrt. Also ist diese Zusammenhangskomponente ein Sterngraph. ■

Bemerkung 8.16. Aus der Definition von \circ folgt, dass $\mathcal{Q}_\ell^{(1)} = \mathcal{Q}_r^{(1)}$ gilt. Eine solche Warteschlange entspricht also einem partiell blinden Zähler. Somit ist $\mathcal{Q}_\ell^{(1)}$ isomorph zu $\mathbb{M}(\Gamma, I)$ mit $|\Gamma| = 1$.

Aus den Sätzen 8.4 und 8.10 sowie Bemerkung 8.16 folgt, dass für ein gegebenes, automatisches Unabhängigkeits-Alphabet (Γ, I) und ein $n \in \mathbb{N}$ entschieden werden kann, ob $\mathbb{M}(\Gamma, I)$ in $\mathcal{Q}_\ell^{(n)}$ eingebettet werden kann. Für endliche Unabhängigkeits-Alphabete ist dies sogar in quadratischer Laufzeit möglich. Im Allgemeinen ist dieses Entscheidungsproblem für rekursive Unabhängigkeits-Alphabete nach dem Satz von Rice (siehe [Ric53]) allerdings unentscheidbar.

KAPITEL IX

Abschluss und Ausblick

9.1 Ergebnisse

Es wurde bewiesen, dass ein Homomorphismus von einem beliebigen Monoid \mathcal{M} in $\mathcal{Q}_\ell^{(n)}$ bzw. $\mathcal{Q}_r^{(n)}$ mit zwei verschiedenen Elementen, deren Bilder dieselben Projektionen auf Schreib- und Leseoperationen besitzen, keine Einbettung ist. Dies wurde in den darauf aufbauenden Kapiteln mehrfach angewendet, um Nicht-Einbettungseigenschaften zu zeigen. So wurde gezeigt, dass sich $\mathcal{Q}_\ell^{(n)}$ nicht in $\mathcal{Q}_\ell^{(m)}$ mit $n > m$ einbetten lässt. Auf gleiche Weise ließ sich zeigen, dass sich weder $\mathcal{Q}_r^{(n)}$ in $\mathcal{Q}_\ell^{(n)}$ einbetten lässt noch umgekehrt. Abschließend wurde eine Charakterisierung für die Klasse aller Spurmonoide angegeben, die sich in $\mathcal{Q}_\ell^{(n)}$ einbetten lassen. Diese ist für Graphklassen mit entscheidbarem FO-Modelchecking sogar entscheidbar.

Insgesamt lassen sich die (Nicht-)Einbettungen also wie folgt grafisch veranschaulichen:

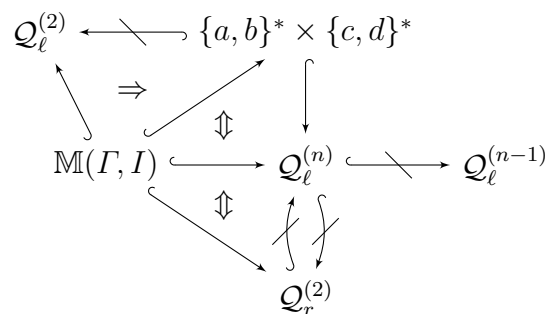


Abbildung 9.1. Die gezeigten Einbettungseigenschaften mit $n \geq 3$.

9.2 Ausblick

Neben den Einbettungseigenschaften gibt es noch eine ganze Menge weiterer algebraischer Eigenschaften von $\mathcal{Q}_\ell^{(n)}$ zu analysieren. So kann zum Beispiel wie in [HKZ14] noch die Konjugation zweier Wörter und Konjugatoren untersucht werden. Zudem können auch hierfür die rationalen und erkennbaren Teilmengen genauer betrachtet werden.

Außerdem wurden die vergesslichen Warteschlangen in dieser Arbeit aus einem zwar allgemeinen, aber dennoch eher optimistischen Blickwinkel betrachtet. So ist

es möglich, das Vergessen auch auf andere Arten zu definieren. Beispielsweise werden in Systemen mit geringem Speicher häufig Warteschlangen so implementiert, dass bei einem Speicherüberlauf weitere Schreiboperationen zuvor automatisch Leseoperationen ausführen, um die ältesten Elemente der Warteschlange zu entfernen und somit Platz zu schaffen. Auch dieses forcierte Vergessen wäre einer etwas genaueren Untersuchung wert. Eine weitere Möglichkeit wäre aber auch, das Vergessen mithilfe einer Markovkette zu modellieren, um dieses tatsächlich zufällig geschehen zu lassen. In [IN97] wurde beispielsweise das LTL-Modelchecking für solche probabilistisch vergesslichen Warteschlangen-Systeme untersucht. Auch die Betrachtungen des zum dort verwendeten Modell zugehörigen Transformationsmonoids sowie dessen algebraische Eigenschaften könnten ebenfalls noch interessante Ergebnisse liefern.

Alles in allem lässt sich also feststellen, dass das Themengebiet der vergesslichen Warteschlangen noch eine ganze Menge Potenzial zum weiteren Erforschen besitzt.

Literaturverzeichnis

- [AJ93] PAROSH A. ABDULLA und BENGT JONSSON: *Verifying programs with unreliable channels*. In: Logic in Computer Science, 1993. LICS'93., Proceedings of Eighth Annual IEEE Symposium on, Seiten 160–170. IEEE, 1993.
- [AJ94] PAROSH A. ABDULLA und BENGT JONSSON: *Undecidable verification problems for programs with unreliable channels*. In: International Colloquium on Automata, Languages, and Programming, Seiten 316–327. Springer, 1994.
- [AK79] ANATOLIJ V. ANISIMOV und DONALD E. KNUTH: *Inhomogeneous sorting*. International Journal of Computer & Information Sciences, Vol. 8 (4): Seiten 255–260, 1979.
- [BO93] RONALD V. BOOK und FRIEDRICH OTTO: *String-rewriting systems*. In: String-Rewriting Systems, Seiten 35–64. Springer, 1993.
- [BZ83] DANIEL BRAND und PITRO ZAFIROPULO: *On communicating finite-state machines*. Journal of the ACM (JACM), Vol. 30 (2): Seiten 323–342, 1983.
- [CL84] MIREILLE CLERBOUT und MICHEL LATTEUX: *Partial commutations and faithful rational transductions*. Theoretical Computer Science, Vol. 34 (3): Seiten 241–254, 1984.
- [CP85] ROBERT CORI und DOMINIQUE PERRIN: *Automates et commutations partielles*. RAIRO, Informatique théorique, Vol. 19 (1): Seiten 21–32, 1985.
- [Die90] VOLKER DIEKERT: *Combinatorics on traces*, Vol. 454. Springer Science & Business Media, 1990.
- [DR95] VOLKER DIEKERT und GRZEGORZ ROZENBERG: *The Book of Traces*. World Scientific, 1995.
- [FJ93] SALLY FLOYD und VAN JACOBSON: *Random early detection gateways for congestion avoidance*. IEEE/ACM Transactions on networking, Vol. 1 (4): Seiten 397–413, 1993.
- [HKZ14] MARTIN HUSCHENBETT, DIETRICH KUSKE und GEORG ZETZSCHE: *The monoid of queue actions*. 2014.
-

- [IN97] PURUSH IYER und MURALI NARASIMHA: *Probabilistic lossy channel systems*. In: Colloquium on Trees in Algebra and Programming, Seiten 667–681. Springer, 1997.
- [Jan12] MATTHIAS JANTZEN: *Confluent string rewriting*, Vol. 14. Springer Science & Business Media, 2012.
- [Kam09] MARK KAMBITES: *Formal languages and groups as memory*. Communications in Algebra, Vol. 37 (1): Seiten 193–208, 2009.
- [KN95] BAKHADYR KHOUSSAINOV und ANIL NERODE: *Automatic presentations of structures*. In: Logic and computational complexity, Seiten 367–392. Springer, 1995.
- [KP16] DIETRICH KUSKE und OLENA PRIANYCHNYKOVA: *The trace monoids in the queue monoid and in the direct product of two free monoids*. arXiv preprint arXiv:1603.07217, 2016.
- [LS62] ROGER C. LYNDON und MARCEL-PAUL SCHÜTZENBERGER: *The equation $a^M = b^N c^P$ in a free group*. Michigan Math. J, Vol. 9 (4): Seiten 289–298, 1962.
- [Maz77] ANTONI MAZURKIEWICZ: *Concurrent program schemes and their interpretations*. DAIMI Report Series, Vol. 6 (78), 1977.
- [New42] MAXWELL H. A. NEWMAN: *On theories with a combinatorial definition of equivalence*. Annals of mathematics, Seiten 223–243, 1942.
- [Ric53] HENRY G. RICE: *Classes of recursively enumerable sets and their decision problems*. Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 74 (2): Seiten 358–366, 1953.
- [Tan03] ANDREW S. TANENBAUM: *Computer networks, 4-th edition*. ed: Prentice Hall, 2003.
- [Zet16] GEORG ZETZSCHE: *Monoids as Storage Mechanisms*. Ph.D. thesis, Technische Universität Kaiserslautern, 2016.
-

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten oder nicht veröffentlichten Schriften entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegen.

Ilmenau, den 2. September 2016

Chris Köcher
